

ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE  
Fakulta riadenia a informatiky

## DIPLOMOVÁ PRÁCA

Štúdijný odbor:  
Aplikovaná matematika

Marek Repčík

Modelovanie výstupnej pamäte systému VoIP  
(Voice over Internet Protocol)

Vedúci: Doc. Ing. Martin Klimo, CSc.  
Reg.č.: 66/2000 jún 2000

## RESUMÉ

V tejto práci sa pokúšam opísať aspekty týkajúce sa sietí, sieťových prenosov atď. V práci uvažujem dva druhy vstupných tokov. Prvý je Poissonov a druhý tzv. MMPP (Markov modulated Poisson Process) vstupný tok generovaný ON-OFF zdrojom. Markovov modulovaný Poissonov proces MMPP je zovšeobecnený Poissonov proces a je bežne používaný pri modelovaní vstupného toku pri komunikačných systémoch ako sú prenosy dát a siete ATM (Asynchronous Transfer Mode). Pointa tejto práce je zostaviť modely, od základných Markovových modelov, ako sú modely  $M|M_k|1|\infty$  a  $MMPP|M_k|1|\infty$ , prejsť k semi-Markovovým modelom s deterministickou obsluhou, typu  $M|D_k|1|\infty$ ,  $MMPP|D_k|1|\infty$  a odvodiť pravdepodobnosti stavov týchto systémov.

*Kľúčové slová: Poissonov proces, MMPP (Markov Modulated Poisson Proces), ON/OFF zdroj, stacionárne rozdelenie pravdepodobnosti.*

## SUMMARY

In this paper I try to describe some circumstances about the webs, web transfers etc. In my study here I have considered two kinds of input flows. The first one is Poisson and the second one is so called MMPP (Markov Modulated Poisson Process) generated by an ON/OFF source. MMPP is a generalized Poisson process and is common used by modelling an input flow at communicate systems such as data tranfer and ATM (Asynchronous Data Mode). The point of this study it to deduce the models, from the basic Markov models such as  $M|M_k|1|\infty$  and  $MMPP|M_k|1|\infty$  to the semi-Markov models with the deterministic service with serving time depending on the number of customers in the queue such as  $M|D_k|1|\infty$ ,  $MMPP|D_k|1|\infty$  and to deduce the stationary probabilities of the states of these systems.

*Key words: Poisson Process, MMPP (Markov Modulated Poisson Process), ON/OFF source, stationary probability distribution.*

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne a že som uviedol všetky použité pramene a literatúru, z ktorej som čerpal.

Súčasne veľmi pekne ďakujem všetkým, ktorí mi pomohli pri tvorbe tejto práce, rodičom, pánovi Mgr. Michalovi Kaukičovi, CSc. a Jánovi Kudličkovi za pomoc po softvérovej stránke a pánom RNDr. Štefanovi Peškovi, CSc., Mgr. Jurajovi Smieškovi a Doc. Ing. Martinovi Klimovi, CSc. za pomoc po konzultačnej stránke.

V Žiline, 4. Mája 2000.

Marek Repčík

# Obsah

<b>1</b>	<b>Popis problému, cieľa, spôsobu riešenia a overenia výsledkov</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Analýza Poissonovho procesu</b>	<b>16</b>
2.1	Predpoklady . . . . .	16
2.2	Rovnice pre pravdepodobnosti $\mathbf{v}(t)$ a ich riešenie všeobecne . . . . .	18
<b>3</b>	<b><math>M M_k 1 _\infty</math></b>	<b>21</b>
3.1	Predpoklady, označenie . . . . .	21
3.2	Model, rovnice pre $\mathbf{p}$ pre stacionárny model . . . . .	22
3.3	Prípady špeciálne volených $\eta_j$ . . . . .	24
3.3.1	Dôvod skúmania špeciálne volených $\eta_j$ . . . . .	24
3.3.2	Predpoklady, označenie . . . . .	24
3.3.3	Definovanie $\eta_j(\epsilon_0, \epsilon_1)$ , odvodenie pravdepodobností $p_k$ . . . . .	25
3.3.4	Vytvárajúca funkcia $F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1)$ pre pravdepodobnosti $p_k$ , stredná dĺžka frontu a rozptyl . . . . .	26
<b>4</b>	<b><math>M G_k 1 _\infty</math></b>	<b>28</b>
4.1	Popis $M G_k 1 _\infty$ . . . . .	28
4.2	Označenie . . . . .	28
4.3	Zostavenie modelu, t.j. rovníc pre pravdepodobnosti $\mathbf{p}$ . . . . .	29

4.3.1	Všeobecný model . . . . .	29
4.3.2	Stacionárny model . . . . .	31
<b>5</b>	<b><math>M D_k 1 _\infty</math></b>	<b>33</b>
5.1	Označenie . . . . .	33
5.2	Model, rovnice pre pravdepodobnosti $\mathbf{p}$ . . . . .	33
5.3	Vytvárajúca funkcia $F_{\pi(T_j)}(x)$ pre $\pi_k(T_j)$ . . . . .	36
5.4	Vytvárajúca funkcia $F_p(x)$ pre $p_k$ . . . . .	37
5.5	Numerické aspekty výpočtu stacionárnych pravdepodobností $\mathbf{p}$ . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Analýza ON/OFF zdroja</b>	<b>39</b>
6.1	Predpoklady ON/OFF zdroja . . . . .	39
6.2	Rovnice pre $j_r^0(t)$ a $j_r^1(t)$ , ich riešenie . . . . .	40
6.2.1	Rovnice a riešenie bez predpokladu stacionárnosti zdroja . . . . .	40
6.2.2	Riešenie pre stacionárny zdroj . . . . .	42
6.3	Rozdelenie dĺžok períód $T_0$ a $T_1$ . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Analýza MMPP (Markov Modulated Poisson Process)</b>	<b>44</b>
7.1	Predpoklady . . . . .	45
7.2	Maticová exponenciála, vlastnosti . . . . .	46
7.3	Rovnice pre pravdepodobnosti ${}_0^j\mathbf{v}(t)$ , ich riešenie všeobecne . . . . .	47
<b>8</b>	<b>MMPP<math> M_k 1 _\infty</math></b>	<b>53</b>
8.1	Predpoklady, označenie . . . . .	53
8.2	Model, rovnice pre pravdepodobnosti $\mathbf{p}$ pre stacionárny model . . . . .	54
8.3	Numerické aspekty výpočtu . . . . .	56
8.4	Model MMPP $ M 1 _\infty$ s konštantnou intenzitou doby obsluhy . . . . .	56

<b>9</b>	<b>MMPP<math> \mathbf{D}_k 1 _\infty</math></b>	<b>58</b>
9.1	Označenie . . . . .	58
9.2	Rocnice pre pravdepodobnosti ${}_0^j\mathbf{p}(t)$ . . . . .	60
9.3	Stacionárny model . . . . .	63
9.4	Numerické aspekty výpočtu . . . . .	63
9.5	Model MMPP $ \mathbf{D} 1 _\infty$ s konštantnou dobou obsluhy . . . . .	64
<b>10</b>	<b>Simulačné výsledky versus analytické</b>	<b>66</b>
10.1	Umelá konverzácia . . . . .	66
10.2	Charakteristiky ľudskej hovorovej reči . . . . .	66
10.3	Aproximácia diskretných geometrických rozdelení spojitými exponen- ciálnymi rozdeleniami . . . . .	67
10.4	Príklad . . . . .	68
10.5	Výsledky a porovnanie . . . . .	69
10.6	Záver . . . . .	71

# Zoznam obrázkov

1.1	Pohľad na problematiku. Realita versus model. . . . .	12
1.2	Štruktúra členenia textu. . . . .	15
2.1	Poissonov proces. . . . .	17
3.1	Prechodový graf pre $M M_k 1 \infty$ systém. . . . .	22
4.1	Analýza príchodov zákazníkov pre $M G_k 1 \infty$ . . . . .	30
6.1	Prechodový graf ON/OFF zdroja. . . . .	41
7.1	Striedanie ON a OFF periód a príchod udalostí počas ON periódy. . . . .	44
7.2	Prechodový graf MMPP. . . . .	47
8.1	Prechodový graf MMPP $ M_k 1 \infty$ modelu. . . . .	55
9.1	Analýza modelu MMPP $ D_k 1 \infty$ . . . . .	60
10.1	Graf pravdepodobností pre simuláciu a model riešený numericky pre dobu obsluhy rovnú od 5, cez 10, 15, 20, až 25 ms. . . . .	72
10.2	Graf strednej dĺžky frontu v závislosti od $k$ a $\epsilon$ . . . . .	74
10.3	Graf strednej doby obsluhy v závislosti od $k$ a $\epsilon$ . . . . .	75
10.4	Graf disperzie doby obsluhy v závislosti od $k$ a $\epsilon$ . . . . .	76
10.5	Graf pravdepodobností prázdneho frontu v závislosti od $k$ a $\epsilon$ . . . . .	77

10.6 Graf pravdepodobnosti prázdneho frontu ak zdroj je ON v závislosti od $k$ a $\epsilon$ . . . . .	78
---	----



# Zoznam tabuliek

10.1	Tabuľky stredného počtu zákazníkov vo fronte $E(N)$ , strednej doby obsluhy $E(T)$ , disperzie doby obsluhy $D(T)$ a pravdepodobnosti prázdneho systému $p_0$ a pre pravdepodobnosti prázdneho systému za predpokladu, že zdroj je ON $p_0^1$ pre rôzne hodnoty $k$ a $\epsilon$ podľa neupravených (nevyhladených) výsledkov simulácie modelu $MMPP D_k 1 \infty$ . . . . .	79
10.2	Tabuľky stredného počtu zákazníkov vo fronte $E(N)$ , strednej doby obsluhy $E(T)$ , disperzie doby obsluhy $D(T)$ a pravdepodobnosti prázdneho systému $p_0$ a pre pravdepodobnosti prázdneho systému za predpokladu, že zdroj je ON $p_0^1$ pre rôzne hodnoty $k$ a $\epsilon$ podľa upravených (vyhladených) výsledkov simulácie modelu $MMPP D_k 1 \infty$ . . . . .	80
10.3	Tabuľka špeciálnych znakov. . . . .	83

# Úvod

Téme, ktorou sa zaoberám v tejto práci, je venovaná značná pozornosť najmä vo vyspelých ekonomikách, kde sú gigantické sieťové prenosy samozrejmosťou. Pod pojmom "Sieťový prenos" mám na mysli najmä telefónne siete, internet, káblovú televíziu a podobne prenos audia a videa. U nás sa rozvíja sieť mobilnej komunikácie, ako aj internet omnoho pomalšie, čo je odrazom vládnej politiky, ako aj štátnych finančných možností. Pretože u nás tejto problematike nie je venovaná dostatočná pozornosť, výsledky v tejto oblasti u nás nie sú viditeľné. Hoci sieťová komunikácia sa u nás rozvíja pomalšie, predsa len sa rozvíja a objavujú sa otázky, problémy s ňou spojené, ktoré treba riešiť. Väčšinou sú to otázky okolo zväčšenia kapacity prenosu, ale aj okolo zlepšenia kvality prenosu. Táto moja téma sa dotýka práve tej druhej časti a to je otázka kvality prenosu signálu.

# Kapitola 1

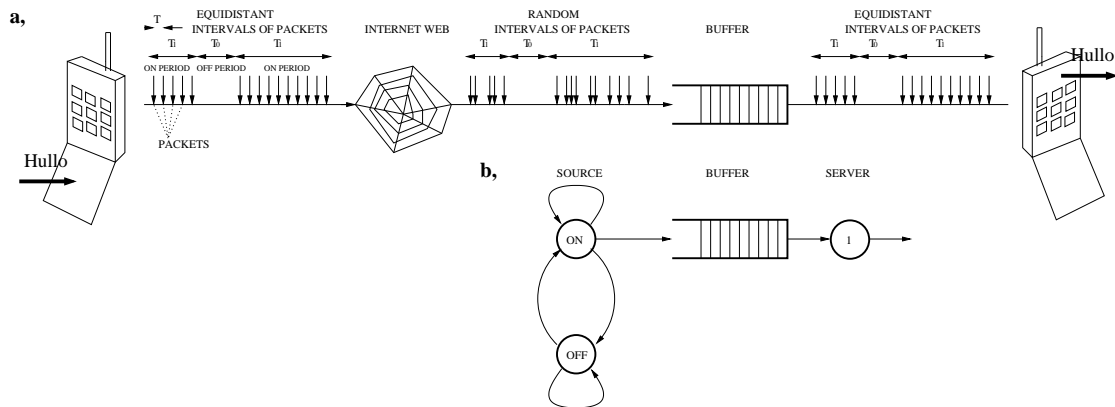
## Popis problému, cieľa, spôsobu riešenia a overenia výsledkov

### Popis problému

Telefónne spoločnosti, najmä operátori mobilných telefónov, v snahe znížiť náklady na medzištátne telefónne hovory (hovory na dlhú vzdialenosť) využívajú internet ako médium na prenos signálu. Využitím voľnej kapacity internetu komunikačné spoločnosti znižujú náklady, ale súčasne znižujú kvalitu prenosu, pretože internetové spojenie je v súčasnosti stále málo spoľahlivé. Hlas, ako objekt prenosu, je v ekvidištantných intervaloch (násobky 125 mikrosekúnd) digitalizovaný a vo forme bitov, vo forme balíkov, packetov dát je každých 20 ms vysielaný do siete k adresátovi. Prochodom cez sieť sa naruší ekvidištantnosť intervalov príchodov packetov. Tesne pred opakovaným výstupom sa packety na chvíľu uskladnia do buffera, z ktorého sa v ekvidištantných intervaloch spracúvávajú, transformujú do formy hlasu. Celý proces je možné vidieť v obr. 1.1a.

Problémov, ktoré môžu nastať, je viacero.

1. Prvý problém je, že pri putovaní sieťou sa niektoré "balíky" môžu stratiť. Potom je stratená informácia nahradená aproximáciou. **Týmto problémom sa v mojej práci nezaobrám.**
2. Druhý veľký problém, ktorý sa objavuje, je, že ekvidištantné rozostupy vzoriek



Obr. 1.1: Pohľad na problematiku. Realita versus model.

hlasu sa cestou v sieti narušia a dostanú náhodný charakter, ako to možno vidieť v obr. 1.1. Ako som už spomenul, v praxi sa tento problém rieši použitím buffera, do ktorého sa packety ukladajú a s malým oneskorením sa v ekvidišťantných intervaloch spracovávajú. Akokoľvek by sme si želali iné, veľkosť buffera je konečná a s tým súvisí ďalší problém.

3. Tretí problém je problém straty informácie v dôsledku preplnenia buffera, resp. zníženie kvality prenosu informácie totálnym vyprázdnením buffera. V realite sa to môže prejaviť akoby preskočením textu, ako keď preskočí ihla na platni, resp. ako tichom, hoci by mal znieť hlas. Tento problém by sa dal pomenovať ako "Problém zriedkavých veľkých chýb", pretože táto chyba nenastáva často, ale keď nastane, tak ju registrujeme dosť markantne.

Problém zriedkavých veľkých chýb by sa dal jednoducho vyriešiť navrhnutím dostatočne veľkého buffera, ale toto nie je cesta, po ktorej sa budem uberať. Dôvodom je, že takýmto riešením by sme naozaj odstránili problém preplnenia, alebo absolútneho vyprázdnenia buffera, ale dôsledok tohoto riešenia by bolo veľké oneskorenie výstupu, čo môže pri telefonovaní a ešte k tomu na veľkú vzdialenosť dosť prekážať.

Sú snahy riešiť tento problém "Zriedkavých veľkých chýb" stratégiou "Častých malých chýb" a to **modelovaním doby obsluhy**, ktorá závisí od počtu zákazníkov v systéme. **Toto je to, čo budem ja riešiť.** V praxi sa to premietne tak, že keď už hrozí, že sa buffer vyprázdni, tak sa spracovávanie, aj výstup, spomalí a ak hrozí, že sa buffer preplní, spracovávanie sa zrýchli. Nevýhodou tohto riešenia je narušenie ekvidišťantnosti vzoriek hlasu. Vzniknú časté, ale malé chyby.

Snaha je meniť túto dobu obsluhy len "málo", aby človek, ako užívateľ, vôbec neregistroval tento efekt. Ak by som prehnal účinky takéhoto riešenia, tak raz by som počul hlas ako hlboký (pri pomalejšej obsluhu), inokedy ako vysoký (pri rýchlejšej obsluhu), čo by bolo dôsledkom zmeny frekvencie hlasu. Za poznamenanie stojí uviesť, že modulovaná obsluha sa predpokladá byť taká, aby stredná doba obsluhy jedného packetu bola rovná strednej dĺžke doby medzi príchodmi dvoch packetov, ak je zdroj zapnutý, teda práve 20 ms.

Ďalší fakt, ktorý je dosť podstatný v tejto problematike, je, že pri vzorkovaní hlasu sa rozlišujú doby hovorenia a doby ticha (ON periódy a OFF periódy). Doby hovorenia zodpovedajú slovám a doby ticha zodpovedajú medzerám medzi slovami. Keď je človek pri aparáte ticho, tak vzorkovač vyhodnotí, že človek je ticho a nevysiela nijaký packet. Meraniami sa zistilo, že rozdelenie intervalu rečovaj aktivity aj pauzy sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia deterministického a dvoch exponenciálnych rozdelení. Pre potreby tejto práce budeme predpokladať, že intervaly rečovej aktivity aj pauzy majú exponenciálne rozdelenie. Podrobnosti možno nájsť v časti 10.1 a 10.2.

## Ciele práce

Snahou je aproximovať realitu nejakým modelom hromadnej obsluhy, zostaviť rovnice a overiť opodstatnenosť použitých predpokladov. Snahou teda je napísať rovnice pre pravdepodobnosti stavov modelu  $MMPP|D_k|1|\infty$ , ktorý sa zdá najviac zodpovedať realite v aspekte deterministickej obsluhy, ale ktorého nevýhodou je jeho zložitosť a neschopnosť nájsť explicitné tvary pravdepodobností a teda zostávajú len numerické metódy. Ostatné modely sú jednoduchšie a sú stopami na mojej ceste od jednoduchšieho k zložitejšiemu a tak to treba aj chápať.

## Postup riešenia

Ako je možno vidieť v obr. 1.1 prípad *a* popisuje realitu a prípad *b* je aproximácia modelom hromadnej obsluhy.

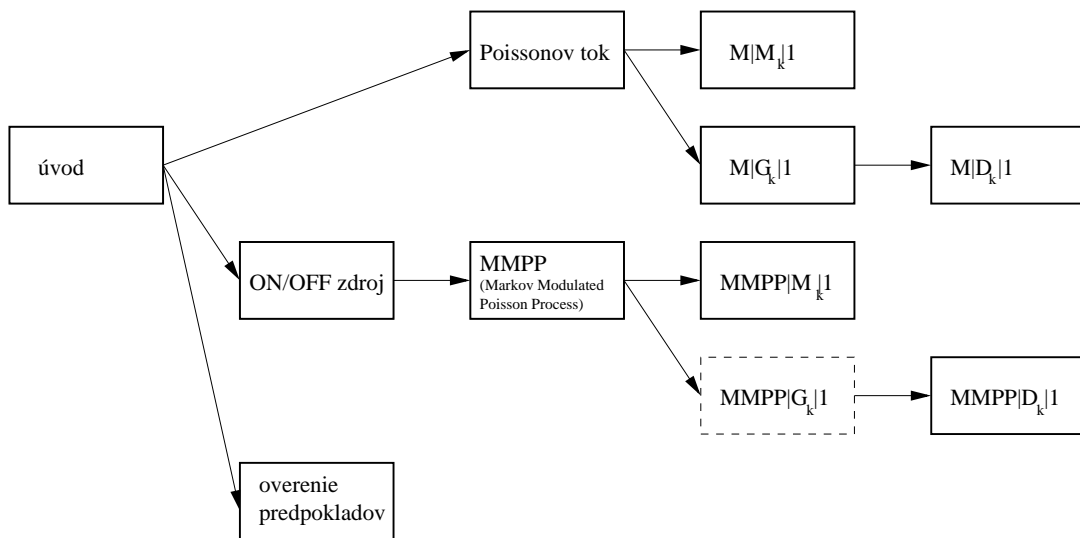
1. Pojem "packet" v realite nahrádzam pojmom "udalosť", resp. "zákazník" v modeloch.

2. Porušenie ekvidistantnosti rozostupov vzoriek pri prechode internetom modelom nejakým náhodným vstupným tokom. Najskôr som kvôli jednoduchosti volil Poissonov vstupný tok, ktorý nezohľadňoval ON a OFF periódny a má len jeden parameter na modelovanie a to je intenzita príchodov zákazníkov. Neskôr som volil MMPP (Markov Modulated Poisson Process) s tromi parametrami na modelovanie, teda modulovaný Poissonov tok, ktorý zohľadňuje ON a OFF periódny a intenzitu príchodu, ak je zdroj v stave ON.
3. Konečný buffer v realite nahrádzam nekonečným bufferom v modeli. Je to kvôli jednoduchosti a aj preto, aby som videl pravdepodobnosti vyšších stavov, t.j. pre vyšší počet zákazníkov v modeli, čo môže byť dosť zaujímavé.
4. Procesor spracúvajúci packety do zvukovej podoby v realite nahrádzam jednou obslužnou linkou v modeli. Fakt, že chcem vypracovať model pre premenlivú dobu obsluhy (kvôli okolnostiam spomenutým vyššie), je zohľadnený voľbou spôsobu obsluhy. Obsluhu v modeli teda volím takú, že závisí od počtu zákazníkov v systéme. Teda, keď je v systéme jeden zákazník, je obsluha vo všeobecnosti iná ako, keď sú v systéme napr. traja zákazníci. Najskôr, opäť kvôli jednoduchosti, volím Markovovu obsluhu závislú od počtu zákazníkov v systéme. Táto obsluha nezodpovedá deterministickej obsluhu v realite, ale ako nejaká aproximácia je vhodná. Neskôr volím obsluhu deterministickú závislú od počtu zákazníkov v systéme.

## Spôsob overenia výsledkov

V podstate jediná vec, ktorú treba overiť, je opodstatnenosť použitia ON/OFF zdroja pri modeli  $MMPP|D|1|\infty$ . Ináč všetko ostatné zodpovedá realite, tým myslím deterministickú obsluhu. Overovať budem simulačné výsledky a výsledkami dosiahnutými numerickými metódami podľa odvodených rovníc modelu.

Prečo skúmam opodstatnenosť použitia ON/OFF zdroja práve pri modeli  $MMPP|D|1|\infty$  a nie pri modeli  $MMPP|D_k|1|\infty$ ? Je to preto, že vôbec nezáleží na tom, ako sa front vyprázdňuje, ale na tom, ako sa naplňa a model  $MMPP|D|1|\infty$  je jednoduchší ako model  $MMPP|D_k|1|\infty$ . Ak výjdu výsledky  $MMPP|D|1|\infty$  zo simulácie podobne ako výsledky dosiahnuté numerikou, môžem povedať, že potom by vyšli podobné výsledky aj pri modeli  $MMPP|D_k|1|\infty$ . Naopak, ak sa ukáže, že simulácia



Obr. 1.2: Štruktúra členenia textu.

nezodpovedá numerike pri modeli  $MMPP|D|1|\infty$ , potom nie je dôvod predpokladať, že to bude ináč pri modeli  $MMPP|D_k|1|\infty$ .

## Štruktúrovanie textu, myšlienok diplomovej práce

Štruktúra diplomovej práce je jednoduchá a logická. Postupujem od jednoduchšieho k zložitejšiemu. Tak, ako to je v realite, že na začiatku je nejaký zdroj, ktorý generuje vstupný tok, buffer a nakoniec obsluha. Jednotlivé kapitoly sú akoby samostatné objekty, ktorých výsledky zapracovávam do ďalších kapitol. Skúmam dva druhy vstupných tokov a to Poissonov a modulovaný Poissonov tok a dva druhy obsluhy, deterministickú a Markovovskú. Štruktúru možno najlepšie pochopiť z obr. 1.2. Model  $MMPP|G_k|1|\infty$  v čiarkovanom ráme je vynechaný, ale analogicky je použitý  $M|G_k|1|\infty$ . Zaujímavé je všimnúť si analógiu medzi modelmi s Poissonovým vstupným tokom a s MMPP vstupným tokom.

# Kapitola 2

## Analýza Poissonovho procesu

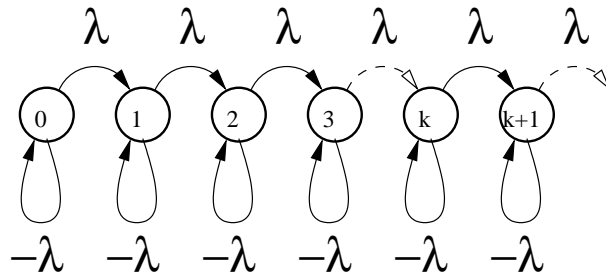
Z aplikačného hľadiska sú významné niektoré jednoduché Markovove procesy, pri ktorých prechody medzi stavmi sú veľmi obmedzené. Pritom tieto procesy popisujú prakticky veľmi významné javy. O aplikácii a analytických aspektoch tohto procesu je možno nájsť v referencii [5] alebo [6].

V tejto kapitole skúmam vlastnosti Poissonového procesu, pričom výsledky využijem v nasledujúcich kapitolách na odvodenie pravdepodobností stavov systémov, v ktorých je zahrnutá aj linka, najmä pri modeli  $M|G_k|1|\infty$ . Budem uvažovať prípad, kde vstupný tok je opísaný Poissonovým procesom s intenzitou príchodu zákazníka  $\lambda$ .

### 2.1 Predpoklady

- Predpokladám systém skladajúci sa iba zo zdroja, ktorý generuje udalosti.
- Nech  $\{N(t) | N(t) \in \mathbf{N}_0\}_{t \in \mathbf{R}_{0+}}$  je Poissonov proces, ktorý popisuje stav systému v čase  $t$ , pričom stav systému je definovaný ako počet udalostí, ktoré nastali od času 0 do času  $t$ . Intenzitu prechodu zo stavu  $k$  do stavu  $k+1$  tohto Poissonovho procesu označujem  $\lambda$ .





Obr. 2.1: Poissonov proces.

- Nech  $\Omega$  je matica prechodov tohto systému. Potom tvar tejto matice je

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

a prechodový graf je znázornený v obr. 2.1.

- Nech systém je v čase 0 prázdny, resp. ináč povedané nech  $P(N(0) = 0) = 1$ .
- Nech  $T$  je náhodná premenná popisujúca dĺžku intervalu medzi dvomi príchodmi udalostí<sup>1</sup>.
- Nech  $v_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(N(t) = k)$  vyjadruje pravdepodobnosť, že systém je v čase  $t$  v stave  $k$ .
- Nech  $\mathbf{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (v_0(t), v_1(t), v_2(t), \dots)^T$ .

---

<sup>1</sup>Doba medzi výskytom dvoch udalostí  $T$  má exponenciálne rozdelenie pravdepodobností s parametrom  $\lambda$ , teda  $T \sim \exp(\lambda)$ , ako ukážem ďalej.

## 2.2 Rovnice pre pravdepodobnosti $\mathbf{v}(t)$ a ich riešenie všeobecne

Kolmogorovove diferenciálne rovnice zapísané v maticovom tvare sú

$$\frac{d\mathbf{v}(t)^T}{dt} = \mathbf{v}(t)^T \mathbf{\Omega} \quad (2.1)$$

a začiatočné podmienky

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{I}_{*1}, \quad (2.2)$$

t.j. prvý riadok jednotkovej matice. Táto začiatočná podmienka zodpovedá faktu, že na začiatku procesu, t.j. v čase 0, s istotou nie je v systéme nijaký zákazník.

Zapísané po zložkách dostávam takúto sústavu Kolmogorovových diferenciálnych rovníc.

$$\frac{dv_0(t)}{dt} = -v_0(t)\lambda, \quad (2.3)$$

$$\frac{dv_k(t)}{dt} = v_{k-1}(t)\lambda - v_k(t)\lambda, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (2.4)$$

Začiatočné podmienky sústavy sú

$$v_0(0) = 1, \quad (2.5)$$

$$v_k(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad (2.6)$$

čo zodpovedá faktu, že s pravdepodobnosťou rovnou 1 nepríde nijaký zákazník za nulovú dobu a druhá rovnica hovorí, že s pravdepodobnosťou rovnou 0 príde jeden alebo viac zákazníkov za nulovú dobu.

Ďalej riešim rovnicu (2.3), pričom nasleduje postupnosť elementárnych úprav

$$\begin{aligned} \frac{d \ln(v_0(t))}{dt} &= -\lambda, & | \int dt, & \text{potom} \\ \int_0^t \frac{d \ln(v_0(s))}{ds} ds &= -\lambda \int_0^t ds, \\ \ln(v_0(t)) - \ln(v_0(0)) &= -\lambda \int_0^t ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{v_0(t)}{v_0(0)}\right) &= -\lambda t, \\ v_0(t) &= v_0(0)e^{-\lambda t}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Rovnicu (2.7) môžeme chápať ako

$$v_0(t) = c_0(t)e^{-\lambda t}, \quad \text{kde}\tag{2.8}$$

$$c_0(t) = 1.\tag{2.9}$$

Ďalej riešim  $v_k(t)$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}$ . Dostávam

$$\frac{dv_k(t)}{dt} + v_k(t)\lambda = v_{k-1}(t)\lambda.\tag{2.10}$$

Budem riešiť najskôr homogénny systém sústavy dif. rovníc (2.10) tvaru

$$\frac{dv_k(t)}{dt} + v_k(t)\lambda = 0, \quad \forall k \in \mathbf{N}.\tag{2.11}$$

Ak si všimnem, rovnicu (2.11) som práve riešil pre  $k = 0$  v (2.3). Potom môžem použiť predošlý výsledok (2.8) s tým rozdielom, že nahradím 0 za  $k$ . Tým pádom okamžite dostávam

$$v_k(t) = v_k(0)e^{-\lambda t}.\tag{2.12}$$

Metódou variácie konštánt zamením  $v_k(0)$  za  $c_k(t)$ , čiže

$$v_k(t) = c_k(t)e^{-\lambda t},\tag{2.13}$$

s podmienkou  $c_k(0) = 0$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}$ , čo je v súlade so začiatočnými podmienkami pre  $v_k(0)$  v (2.6). (2.13) dosadím do pôvodnej nehomogénnej rovnice (2.10) a dostanem

$$\frac{dc_k(t)}{dt}e^{-\lambda t} + c_k(t)(-\lambda e^{-\lambda t}) + c_k(t)\lambda e^{-\lambda t} = c_{k-1}(t)\lambda e^{-\lambda t}.\tag{2.14}$$

Z (2.14) dostávam rekurentný vzťah pre  $c_k(t)$  v tvare

$$\frac{dc_k(t)}{dt} = \lambda c_{k-1}(t), \quad \int dt, \quad \text{potom} \quad (2.15)$$

$$c_k(t) = c_k(0) + \lambda \int_0^t c_{k-1}(s) ds, \quad (2.16)$$

resp. ak si uvedomím, že  $c_0(0) = 1$  a  $c_k(0) = 0$ , tak

$$c_0(t) = 1, \quad (2.17)$$

$$c_k(t) = \lambda \int_0^t c_{k-1}(s) ds, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (2.18)$$

Matematickou idukciou sa dá triviálne ukázať, že

$$c_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbf{N}_0. \quad (2.19)$$

Potom pravdepodobnosti stavov majú tvar

$$v_k(t) = \boxed{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}}, \quad \forall k \in \mathbf{N}_0. \quad (2.20)$$

$v_k(t)$  má Poissonove rozdelenie pravdepodobností, z toho názov Poissonov proces.

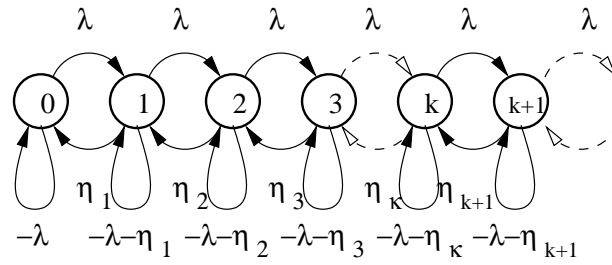
# Kapitola 3

## $M|M_k|1|\infty$

V tejto kapitole analyzujem ďalší model a to  $M|M_k|1|\infty$ , t.j. jednolinkový systém s Poissonovým vstupným tokom, ktorým sa zaoberám v kapitole 2, s Markovovou obsuhou závislou na počte zákazníkov v systéme, čo vyjadruje index  $k$  pri písmene  $M$ . Najskôr spomeniem predpoklady, potom odvodím rovnice pre pravdepodobnosti bytia systému v nejakom stave, vytvárajúcu funkciu, charakteristiky všeobecne a pre špeciálnu voľbu parametrov doby obsluhy.

### 3.1 Predpoklady, označenie

- Nech vstupný tok je taký, ako v kapitole 2.
- Predpokladám jednu obslužnú linku, ktorej dobu obsluhy nech popisuje náhodná premenná  $T_j$  a nech sa riadi  $T_j \sim \exp(\eta_j)$  rozdelením pravdepodobnosti, kde  $j$  vyjadruje počet zákazníkov v systéme.
- Nech  $\{Y(t)|Y(t) \in \mathbf{N}_0\}_{t \in \mathbf{R}_{0+}}$  je náhodný proces, kde  $Y(t)$  je diskrétna náhodná premenná, ktorá popisuje stav systému, t.j. počet zákazníkov v systéme v čase



Obr. 3.1: Prechodový graf pre  $M|M_k|1|\infty$  systém.

$t$ , ktorý je súčasne Markovovým reťazcom s maticou prechodov

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \eta_1 & -\lambda - \eta_1 & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \eta_2 & -\lambda - \eta_2 & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \eta_3 & -\lambda - \eta_3 & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Nech  $p_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(Y(t) = k)$  označuje pravdepodobnosť, že v čase  $t$  je v systéme  $k$  zákazníkov a nech  $p_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$ , ak existuje. Potom  $p_k$  označuje pravdepodobnosť, že v stacionárnom systéme je  $k$  zákazníkov.
- Nech  $\mathbf{p}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots)^T$  a nech  $\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t)$ , ak existuje.

## 3.2 Model, rovnice pre $\mathbf{p}$ pre stacionárny model

Prechodový graf znázornený v obr. 3.1 zodpovedá prechodovému grafu tohto systému. Kolmogorovove diferenciálne rovnice pre všeobecný model zapísané v maticovom tvare sú

$$\frac{d\mathbf{p}(t)^T}{dt} = \mathbf{p}(t)^T \Omega \quad (3.1)$$

a začiatočné podmienky nie sú podstatné.

Pre stacionárny model prejde sústava (3.1) na tvar

$$0 = \mathbf{p}(t)^T \mathbf{\Omega}, \quad (3.2)$$

navyše

$$\mathbf{p}^T \mathbf{1} = 1, \quad (3.3)$$

čo je dôsledkom vety o úplnej pravdepodobnosti.

Sústava (3.2) prepísaná po zložkách má tvar

$$\begin{aligned} 0 &= -p_0 \lambda + p_1 \eta_1, \\ 0 &= p_{k-1} \lambda - p_k (\eta_k + \lambda) + p_{k+1} \eta_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Túto sústavu budem riešiť substitúciou  $z_k \stackrel{\text{def}}{=} p_{k-1} \lambda - p_k \eta_k$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}$  a potom sústava (3.4) prejde na tvar

$$\begin{aligned} 0 &= -z_1, \\ 0 &= z_k - z_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Vidno, že úloha riešiť sústavu lineárnych rovníc prešla na úlohu riešiť diferenčnú rovnicu v  $z_k$ . Vidím, že

$$\begin{aligned} z_k &= z_{k+1} = \text{const} = z_1 = 0, \quad \text{potom} \\ 0 &= z_k = p_{k-1} \lambda - p_k \eta_k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Z toho sa dá jednoducho matematickou indukciou ukázať, že

$$p_k = \frac{\lambda^k}{\prod_{j=1}^k \eta_j} p_0, \quad \forall k \in \mathbf{N}_0. \quad (3.7)$$

Z dôsledku  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$  a z rovnice (3.7) vyplýva, že

$$p_0 = \left[ \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{\prod_{j=1}^m \eta_j}} \right]^1, \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup>Definujem  $\prod_{j=1}^0 \eta_j = 1$ .

resp. všeobecne platí

$$p_k = \frac{\lambda^k}{\prod_{j=1}^k \eta_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{j=1}^m \eta_j}}, \quad \forall k \in \mathbf{N}_0. \quad (3.9)$$

### 3.3 Prípád špeciálne volených $\eta_j$

#### 3.3.1 Dôvod skúmania špeciálne volených $\eta_j$

Túto časť treba chápať ako appendix, ako niečo navyše. Je to pokus o voľbu tvarov dôb obslúh. Ako bolo spomenuté v úvode, na odstránenie veľkých chýb v prenose je volená stratégia častých malých chýb zapríčinených nekonštantnou dobou obsluhy. Snahou je zistiť vplyv relevantných parametrov na strednú dobu obsluhy, pravdepodobnosť systému v stave 0, rovnako ako na strednú dĺžku fronu a iné. Konkrétnou voľbou pre intenzitu doby obsluhy chcem odvodiť konkrétne tvary spomenutých charakteristík. Preto požadujem od tej zvolenej funkcie dobré vlastnosti, ktoré sú opísané nižšie.

#### 3.3.2 Predpoklady, označenie

- Nech  $\eta_j(\epsilon_0, \epsilon_1)$  je funkcia, ktorá pre dané  $\epsilon_0$  a  $\epsilon_1$  popisuje  $\eta_j$ .
- Nech je funkcia  $\eta_j(\epsilon_0, \epsilon_1)$  pre pevné  $\epsilon_0, \epsilon_1$  ohraničená zhora vzhľadom na  $j$ , rastúca<sup>2</sup> vzhľadom na  $j$ , nech je  $\forall j \in \mathbf{N}$  diferencovateľná a kladná v každom bode  $(\epsilon_0, \epsilon_1) \in \mathbf{R}_{0+}^2$ .

---

<sup>2</sup>Pretože doba obsluhy sa predpokladá klesajúca s rastúcim počtom zákazníkov v systéme, intenzita, ktorej prevrátená hodnota je stredná doba obsluhy pri exponenciálnom rozdelení, musí byť potom rastúca s rastúcim počtom zákazníkov v systéme.



### 3.3.3 Definovanie $\eta_j(\epsilon_0, \epsilon_1)$ , odvodenie pravdepodobností $p_k$

Volím  $\eta_j \stackrel{\text{def}}{=} (\epsilon_0 + \frac{\epsilon_1}{j})^{-1}$ , ľahko možno ukázať, že takto volená funkcia spĺňa predpoklady z časti 3.3.2, potom<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^k \eta_j^{-1} &= \prod_{j=1}^k (\epsilon_0 + \frac{\epsilon_1}{j}) = \prod_{j=1}^k \epsilon_0 \frac{(j + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})}{j} = \\ &= \epsilon_0^k \frac{(k + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})!}{k! (\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})!} = \epsilon_0^k \binom{k + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}{k}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

z toho potom

$$p_k = (\lambda \epsilon_0)^k \binom{k + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}{k} p_0, \quad \forall k \in \mathbf{N}_0. \quad (3.11)$$

**Veta 3.3.1 (Stacionárnosť systému)** *Stacionárny systém  $M|M_k|1|_\infty$  s intenzitou príchodu zákazníka  $\lambda$  a s intenzitami doby obsluhy  $\eta_k = (\epsilon_0 + \frac{\epsilon_1}{k})^{-1}$  existuje, ak  $\lambda \epsilon_0 < 1$ .*

Dôkaz.

Nech  $\lambda \epsilon_0 < 1$ , to je ekvivalentné s tvrdením  $\epsilon_0 < \frac{1}{\lambda}$ , to je ekvivalentné s tvrdením, že existuje kladné číslo  $c$  také, že  $\epsilon_0 + c \leq \frac{1}{\lambda}$ . Zvolím číslo  $K$  tak, aby

$$\frac{1}{\eta_K} = (\epsilon_0 + \frac{\epsilon_1}{K}) < \epsilon_0 + c \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (3.12)$$

Nerovnica platí pre všetky ďalšie intenzity dôb obslúh. Teda od istého  $K$  platí, že zákazníci prichádzajú pomalšie ako odchádzajú, čo je ekvivalentné s tvrdením, že stredná dĺžka frontu je konečná, čo je ekvivalentné s tvrdením, že existuje stacionárny systém.

□

---

<sup>3</sup>Zovšeobecný faktoriál pre reálny argument definujem ako  $x! = \gamma(x+1)$ , kde  $\gamma$  je Gama-funkcia definovaná pre kladné reálne hodnoty ako  $\gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  a pre všetky reálne hodnoty argumentu platí vlastnosť faktoriálu, t.j.  $x! = x(x-1)!$ . Niekedy sa zovšeobecný faktoriál označuje  $\pi(x)$ . Kombinačné čísla sa dajú potom zovšeobecnit v zmysle zovšeobecného faktoriálu.

Na odvodenie pravdepodobnosti  $p_0$  využijem opäť fakt, že  $1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k$ . Po dosadení a úpravách<sup>4</sup> dostávam

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \epsilon_0)^k \binom{k + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}{k} p_0 = \\ &= p_0 \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \epsilon_0)^k \binom{k + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}{k} = p_0 (1 - \lambda \epsilon_0)^{-(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Vidno, že predpoklad konvergence radu v rovnici (3.13), teda že  $\lambda \epsilon_0 < 1$ , je v súlade s predpokladom, že stredná doba obsluhy je menšia ako stredná doba príchodu ďalšieho zákazníka.

Z toho

$$p_k = \boxed{(1 - \lambda \epsilon_0)^{(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})} (\lambda \epsilon_0)^k \binom{k + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}{k}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.14)$$

### 3.3.4 Vytvárajúca funkcia $F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1)$ pre pravdepodobnosti $p_k$ , stredná dĺžka frontu a rozptyl

$$\begin{aligned} F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda \epsilon_0)^{(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})} (\lambda \epsilon_0 x)^k \binom{k + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}{k} = \\ &= (1 - \lambda \epsilon_0)^{(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \epsilon_0 x)^k \binom{k + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}{k} = \boxed{\left(\frac{1 - \lambda \epsilon_0 x}{1 - \lambda \epsilon_0}\right)^{-(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Aby som odvodil strednú hodnotu a disperziu derivujem  $F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1)$  parciálne podľa  $x$

$$\frac{\partial F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1)}{\partial x} = \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0} \left(\frac{1 - \lambda \epsilon_0 x}{1 - \lambda \epsilon_0}\right)^{-(2 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1)}{\partial x^2} = \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \left(2 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \left(\frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{1 - \lambda \epsilon_0 x}{1 - \lambda \epsilon_0}\right)^{-(3 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})}. \quad (3.17)$$

Strednú hodnotu a disperziu vyjadrím pomocou parciálnych derivácií vytvárajúcej

<sup>4</sup>Využívam tu fakt, že pre  $m > 0$ ,  $|x| < 1$  platí  $(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!} x^2 \mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} x^3 + \dots$ , takzvaný zovšeobecnený binomický rozvoj.

Resp.  $(1 \pm x)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m-1+k}{k} (\mp x)^k$  [1, str. 325].

funkcie  $F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1)$ , potom

$$\begin{aligned} E(K) &= \frac{\partial F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1)}{\partial x} \Big|_{x=1} = \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0} \left(\frac{1 - \lambda \epsilon_0 x}{1 - \lambda \epsilon_0}\right)^{-(2 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0})} \Big|_{x=1} = \\ &= \boxed{\left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} D(K) &= E(K^2) - E(K)^2 = (F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1)_x + F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1)_{xx}) \Big|_{x=1} - F_p(x, \epsilon_0, \epsilon_1)_x^2 \Big|_{x=1} = \\ &= \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0} + \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \left(2 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \left(\frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0}\right)^2 - \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0}\right)^2 = \\ &= \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0} + \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \left(\frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0} \left(1 + \frac{\lambda \epsilon_0}{1 - \lambda \epsilon_0}\right) = \\ &= \boxed{\left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \frac{\lambda \epsilon_0}{(1 - \lambda \epsilon_0)^2}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

# Kapitola 4

## $M|G_k|1|\infty$

### 4.1 Popis $M|G_k|1|\infty$

Model  $M|G_k|1|\infty$  je model s Poissonovým vstupným tokom, s dobou obsluhy  $T_j$ , ktorá závisí od počtu zákazníkov  $j$  v systéme a riadi sa bližšie nešpecifikovaným rozdelením pravdepodobnosti  $T_j \sim G_j(\cdot)$ , s jednou obslužnou linkou a nekonečným frontom.

### 4.2 Označenie

- Platia všetky doterajšie označenia.
- Predpokladám Poissonov vstupný tok z kapitoly 2.
- Predpokladám jednu obslužnú linku.
- Nech  $T_j$  je spojitá náhodná premenná popisujúca dobu obsluhy jedného zákazníka, ak na začiatku obsluhy bol systém v stave  $j$ , pričom  $T_j \sim G_j(\cdot)$ , kde  $G_j(\cdot)$  je bližšie nešpecifikované rozdelenie pravdepodobností. Z označenia vyplýva, že doba obsluhy  $T_j$  môže byť pre rôzne  $j$  rôzna, čo aj predpokladám.
- Nech  $\{Y(t)|Y(t) \in \mathbf{N}_0\}_{t \in \mathbf{R}_{0+}}$  je náhodný proces, kde  $Y(t)$  je diskrétna náhodná premenná, ktorá popisuje stav systému, t.j. počet zákazníkov v systéme v čase  $t$ .

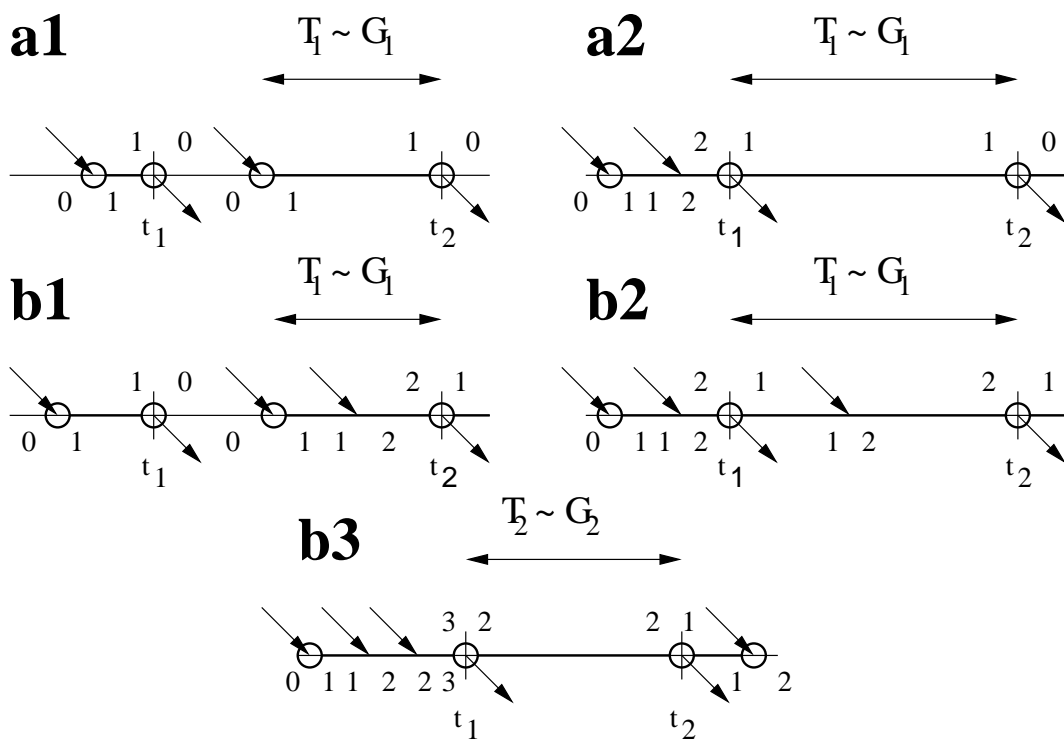
- Nech  $p_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(Y(t) = k)$  je pravdepodobnosť, že v čase  $t$  je v systéme  $k$  zákazníkov a nech  $p_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$ , ak existuje. Potom  $p_k$  vyjadruje pravdepodobnosť, že v stacionárnom systéme je  $k$  zákazníkov.
- Nech  $\mathbf{p}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t), \dots)^T$  a nech  $\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t)$ , ak limita existuje.
- Nech  $\tau_j \stackrel{\text{def}}{=} E(T_j) = \int_0^\infty t g_j(t) dt$ , ak existuje. Potom  $\tau_j$  je stredná hodnota doby obsluhy, ak na začiatku obsluhy bolo v systéme  $j$  zákazníkov.
- Nech  $\sigma_j^2 \stackrel{\text{def}}{=} D(T_j) = \int_0^\infty (t - \tau_j)^2 g_j(t) dt$ , ak existuje. Potom  $\sigma_j^2$  je disperzia doby obsluhy, ak na začiatku obsluhy bolo v systéme  $j$  zákazníkov.
- Nech  $\pi_k(T_j)$  je pravdepodobnosť, že za dobu obsluhy jedného zákazníka príde do systému  $k$  zákazníkov a systém bol na začiatku obsluhovania v stave  $j$  (nepočítame odchádzajúceho zákazníka, ak nejaký v tom čase odchádzal).
- Nech

$$\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \pi_0(T_1) & \pi_1(T_1) & \pi_2(T_1) & \pi_3(T_1) & \pi_4(T_1) & \dots \\ \pi_0(T_1) & \pi_1(T_1) & \pi_2(T_1) & \pi_3(T_1) & \pi_4(T_1) & \dots \\ 0 & \pi_0(T_2) & \pi_1(T_2) & \pi_2(T_2) & \pi_3(T_2) & \dots \\ 0 & 0 & \pi_0(T_3) & \pi_1(T_3) & \pi_2(T_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

## 4.3 Zostavenie modelu, t.j rovníc pre pravdepodobnosti $\mathbf{p}$

### 4.3.1 Všeobecný model

Rovnice pre tento model odvodím z vety o úplnej pravdepodobnosti. Čas  $t_1$  nech je čas skončenia obsluhy nejakého zákazníka a čas  $t_2$  nech je koniec obsluhy bezprostredne nasledujúceho zákazníka. Budem skúmať, čo sa deje so systémom v takýchto intervaloch. V týchto intervaloch systém spĺňa Markovovu vlastnosť, pretože stav systému v čase  $t_2$  závisí od toho, v akom stave bol systém v čase  $t_1$  a nie od predošlých časov odchodov. Prípady *a* v predošlom obrázku popisujú možné stavy, ako možno dosiahnuť v čase  $t_2$  stav 0. Prípady *b* zasa popisujú možné prípady, ako možno v čase



Obr. 4.1: Analýza príchodov zákazníkov pre  $M|G_k|1|\infty$ .

$t_2$  dosiahnuť stav systému rovný 1. Rozoberiem najskôr prípad *a*, ktorý hovorí, že buď (v čase  $t_1 + 0$  je v systéme 0 zákazníkov, potom príde jeden, ktorý je obslužený za dobu  $T_1$  a počas tejto doby obsluhy nepríde nikto) alebo (v čase  $t_1 + 0$  je v systéme 1 zákazník a počas jeho doby obsluhy nepríde nikto). Prípad *b* bude buď (v čase  $t_1 + 0$  je v systéme 0 zákazníkov, potom príde jeden, ktorý bude obslužený za dobu  $T_1$  a počas tejto doby obsluhy príde práve jeden zákazník) alebo (v čase  $t_1 + 0$  je v systéme 1 zákazník, ktorý bude obslužený za dobu  $T_1$  a počas tejto doby obsluhy príde práve jeden zákazník) alebo (v čase  $t_1 + 0$  sú v systéme 2 zákazníci, prvý vo fronte bude obslužený za dobu  $T_2$  (podľa predpokladu, že doba obsluhy závisí od počtu zákazníkov v systéme na začiatku obsluhy zákazníka) a za dobu obsluhy nepríde nijaký zákazník). V popise boli použité výroky typu "Buď, alebo", to znamená, že ide o disjunktné javy. Zapísané v rovniciach to bude

$$\begin{aligned}
 p_0(t_2) &= p_0(t_1)\pi_0(T_1) + p_1(t_1)\pi_0(T_1), \\
 p_1(t_2) &= p_0(t_1)\pi_1(T_1) + p_1(t_1)\pi_1(T_1) + p_2(t_1)\pi_0(T_2),
 \end{aligned}$$

$$p_k(t_2) = p_0(t_1)\pi_k(T_1) + p_1(t_1)\pi_k(T_1) + p_2(t_1)\pi_{k-1}(T_2) + \dots + p_{k+1}(t_1)\pi_0(T_{k+1}). \quad (4.1)$$

Začiatkové podmienky nie sú podstatné.

Celú sústavu môžem prepísať v maticovom zápise na

$$\mathbf{p}(t_2)^T = \mathbf{p}(t_1)^T \Pi. \quad (4.2)$$

Iným, zovšeobecneným zápisom po zložkách prejde sústava (4.1) na tvar

$$p_k(t_2) = p_0(t_1)\pi_k(T_1) + \sum_{l=1}^{k+1} p_l(t_1)\pi_{k+1-l}(T_l), \quad \forall k \in \mathbf{N}_0. \quad (4.3)$$

Ďalej sa budem zaoberať odvodením  $\pi_k(T_j)$ . Nech  $T_j$  je spojitá náhodná premenná, ktorá má hustotu pravdepodobnosti  $g_j(\cdot)$ . Pravdepodobnosť príchodov  $k$  zákazníkov za dobu  $t$  pri Poissonovom vstupnom toku z predošlej kapitoly 2 je  $v_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}_0$ . Potom pre  $\pi_j(T_k)$ , t.j. pre pravdepodobnosť, že za dobu obsluhy jedného zákazníka príde  $k$  zákazníkov a systém bol na začiatku obsluhy v stave  $j$ , platí z vety o úplnej pravdepodobnosti

$$\pi_k(T_j) = \int_0^\infty v_k(t)g_j(t) dt = \boxed{\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} g_j(t) dt}, \quad (4.4)$$

čo sa dá interpretovať ako  $E(v_k(T_j))$ , t.j. stredná hodnota náhodnej veličiny  $v_k(T_j)$ .

### 4.3.2 Stacionárny model

Predpokladám, že parametre modelu sú nastavené tak, aby sa systém po čase ustálil. Potom má zmysel skúmať stacionárne pravdepodobnosti stavov.

Potom pre stacionárny systém existujú  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = p_k$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}_0$ .

Sústava stacionárneho stavu v prepise stacionárnych pravdepodobností  $p_k$  má tvar

$$p_k = p_0 \pi_k(T_1) + \sum_{j=1}^{k+1} p_j \pi_{k+1-j}(T_j), \quad \forall k \in \mathbf{N}_0, \quad (4.5)$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k, \quad (4.6)$$

čo je dôsledok vety o úplnej pravdepodobnosti, pričom

$$\pi_k(T_j) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} g_j(t) dt. \quad (4.7)$$

Prepísané v maticovom zápise to je

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T \Pi, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{1} = 1. \quad (4.9)$$

Úloha by sa dala preformulovať na nájdenie takého vlastného normovaného vektora  $\mathbf{p}$  matice  $\Pi$  pre vlastné číslo 1, ktorého zložky sú nezáporné. Resp. ako úloha nájsť pevný bod zobrazenia  $\Pi$ . Procedúra by potom vyzerala takto

```

epsilon := 0.00001 %malé číslo;
p := (1, 0, 0, 0, ...)^T;
repeat
    p* := p;
    p := (p*^T * Pi)^T;
until ||p - p*|| < epsilon;

```

Treba mať na pamäti, že namiesto nekonečnodimenzionálnej stochastickej matice  $\Pi$  treba použiť jej konečnodimenzionálnu aproximáciu a upraviť jej posledný riadok tak, aby bola stochastická po stĺpcoch. Ak existuje stacionárny systém, tak postupnosť iterácií počítaných takýmto rekurentným spôsobom konverguje. Dôkaz je triviálny. Stačí, ak si uvedomím, že takáto rekurencia priamo simuluje proces v časoch odchodov zákazníkov zo systému a pretože sa systém časom ustáli, musí skonvergovať aj vyššie-spomenuť postupnosť iterácií.



# Kapitola 5

## $M|D_k|1|_\infty$

V tejto kapitole odvodím rovnice pre stacionárne pravdepodobnosti systému  $M|D_k|1|_\infty$ , pričom ukážem, že tento model je špeciálnym prípadom systému z kapitoly 4, čím môžem použiť výsledky z tamojšej kapitoly.

### 5.1 Označenie

- Nech platí označenie z predošlých kapitol.
- Nech doby obsluhy  $T_j$  definované v predošlej kapitole sú konštantné a rovné  $\tau_j$ .
- Nech  $F_{\pi(T_j)}(x)$  je vytvárajúca funkcia pravdepodobností  $\pi_k(T_j)$ .
- Nech  $F_p(x)$  je vytvárajúca funkcia pravdepodobností  $p_k$ .

### 5.2 Model, rovnice pre pravdepodobnosti p

**Definícia 5.2.1 (Diracova funkcia)** *Diracova funkcia<sup>1</sup> je funkcia s vlastnosťami*

$$1. \delta(t) = \begin{cases} 0, & ak \ t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ \infty, & ak \ t = 0, \end{cases}$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

---

<sup>1</sup>Niekedy známa pod názvom "Jednotkový impulz".

Dajú sa odvodiť ďalšie vlastnosti Diracovej funkcie, ale ja využijem najmä nasledujúce tvrdenie.

**Veta 5.2.1 (Vlastnosť Diracovej funkcie)**

$$(a > 0)(f(t) \text{ je spojitá na } \mathbf{R}_{0+}) \Rightarrow \left( \int_0^\infty f(t)\delta(t-a) dt = f(a) \right). \quad (5.1)$$

Dôkaz.

Nech  $\delta_n(t)$  je funkcia<sup>2</sup> s vlastnosťami

$$\delta_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ak } t \in (-\infty, 0), \\ n, & \text{ak } t \in \left\langle 0, \frac{1}{n} \right\rangle, \\ 0, & \text{ak } t \in \left( \frac{1}{n}, \infty \right). \end{cases} \quad (5.2)$$

Potom triviálne platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t) = \delta(t). \quad (5.3)$$

Nech platí predpoklad tvrdenia, t.j. nech  $a > 0$  a nech  $f(t)$  je spojitá na  $\mathbf{R}_{0+}$ . Potom

$$\int_0^\infty f(t)\delta_n(t-a) dt = \int_0^a f(t)\delta_n(t-a) dt + \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)\delta_n(t-a) dt + \int_{a+\frac{1}{n}}^\infty f(t)\delta_n(t-a) dt. \quad (5.4)$$

Z definície  $\delta_n(t)$  vyplýva, že prvý a tretí integrál na pravej strane rovnice (5.4) je rovný 0. Ďalej využijem vlastnosť, že  $\delta_n(t)$  je konštantná na intervale  $\left\langle 0, \frac{1}{n} \right\rangle$  a jej hodnota na tomto intervale je  $n$ . Potom dostávam

$$\int_0^\infty f(t)\delta_n(t-a) dt = n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t) dt. \quad (5.5)$$

---

<sup>2</sup>Môžem napr. voliť  $\delta_n(t)$  ako v referencii [2]

$$\begin{aligned} \delta_n(t) &= \frac{2}{\pi} \frac{n}{e^{nt} + e^{-nt}}, & (\text{Stieltjes}), \\ \delta_n(t) &= \frac{1}{\pi} \frac{n}{(nt)^2 + 1}, & (\text{Cauchy}), \\ \delta_n(t) &= \frac{\sin(nt)}{\pi t}, & (\text{Dirichlet}). \end{aligned}$$

Funkcia  $f(t)$  je podľa predpokladu spojitá na intervale  $\langle a, a + \frac{1}{n} \rangle$  a teda existuje bod  $\xi_n \in \langle a, a + \frac{1}{n} \rangle$  taký, že platí

$$\int_0^\infty f(t) \delta_n(t - a) dt = n \int_a^{a + \frac{1}{n}} f(a + \xi_n) dt. \quad (5.6)$$

Po úprave dostávam

$$\int_0^\infty f(t) \delta_n(t - a) dt = f(a + \xi_n). \quad (5.7)$$

Navyše platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ . Potom

$$\int_0^\infty f(t) \delta(t - a) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t) \delta_n(t - a) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a + \xi_n) = f(a). \quad (5.8)$$

□

**Veta 5.2.2** *Nech  $T_j$  je kladná spojitá náhodná premenná, nech  $\delta(t)$  je Diracova funkcia a  $\tau_j > 0$ , potom  $\delta(t - \tau_j)$  môžem chápať ako hustotu pravdepodobnosti, pričom stredná hodnota náhodnej premennej  $T_j$  je potom  $E(T_j) = \tau_j$  a disperzia  $D(T_j) = 0$ .*

Dôkaz.

1. Najskôr treba overiť, že  $\delta(t - \tau_j)$  je hustotou pravdepodobnosti.

- Treba overiť, či  $\delta(t - \tau_j) \geq 0$ . To platí podľa definície Diracovej funkcie.
- Treba overiť, či  $\int_0^0 \delta(t - \tau_j) dt = 0$ . To platí automaticky.
- Treba overiť, či  $\int_0^\infty \delta(t - \tau_j) dt = 1$ . Toto vyplýva z vety (5.2.1), ak za  $f$  volím 1.

Teda  $\delta(t - \tau_j)$  môže byť hustotou pravdepodobnosti. Ďalej ukážem, že platia aj ďalšie tvrdenia o strednej hodnote a disperzii.

2. Stredná hodnota je definovaná ako  $E(T_j) = \int_0^\infty t \delta(t - \tau_j) dt = \tau_j$  čo je dôsledok predošlej vety 5.2.1.

3. Disperzia je definovaná ako  $D(T_j) = \int_0^\infty (t - E(T_j))^2 \delta(t - \tau_j) dt = 0$ , opäť ako dôsledok predošlej vety 5.2.1.

□

**Veta 5.2.3** Systém  $M|D_k|1|_\infty$  s deterministickými dobami obsluhy  $\tau_j$  závislými od počtu  $j$  zákazníkov v systéme na začiatku obsluhy je špeciálnym prípadom systému  $M|G_k|1|_\infty$  a rovnice pre stacionárne pravdepodobnosti stavov sú

$$p_k = p_0 \pi_k(T_1) + \sum_{j=1}^{k+1} p_j \pi_{k+1-j}(T_j), \quad \forall k \in \mathbf{N}_0, \quad (5.9)$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k, \quad (5.10)$$

$$\pi_k(T_j) = \frac{(\lambda \tau_j)^k}{k!} e^{-\lambda \tau_j}. \quad (5.11)$$

Dôkaz.

Systém  $M|G_k|1|_\infty$  predpokladá, že doby obsluhy  $T_j$  sú *spojité* náhodné premenné, ktoré sa riadia  $G_j(\cdot)$  rozdelením pravdepodobností, čomu zodpovedá hustota pravdepodobnosti  $g_j(t)$ . Volím teraz  $g_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(t - \tau_j)$ . Podľa predošlej vety 5.2.2 platí  $E(T_j) = \int_0^\infty t \delta(t - \tau_j) dt = \tau_j$  a  $D(T_j) = \int_0^\infty (t - E(T_j))^2 \delta(t - \tau_j) dt = 0$ , čo zodpovedá predpokladom tohto deterministického modelu  $M|D_k|1|_\infty$ . Pre systém  $M|G_k|1|_\infty$  platia odvodené stacionárne rovnice (4.8), (4.9) a pre  $\pi_j(T_k)$  platí (4.7), ktorá má po úprave tvar  $\pi_j(T_k) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} g_j(t) dt = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \delta(t - \tau_j)(t) dt = \frac{(\lambda \tau_j)^k}{k!} e^{-\lambda \tau_j}$ .

□

### 5.3 Vytvárajúca funkcia $F_{\pi(T_j)}(x)$ pre $\pi_k(T_j)$

$$F_{\pi(T_j)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(T_j) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda \tau_j} \frac{(\lambda \tau_j x)^k}{k!} = \boxed{e^{\lambda \tau_j (x-1)}}. \quad (5.12)$$

## 5.4 Vytvárajúca funkcia $F_p(x)$ pre $p_k$

$$\begin{aligned}
 F_p(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} [p_0 \pi_k(T_1) + \sum_{j=1}^{k+1} p_j \pi_{k+1-j}(T_j)] x^k = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} p_0 \pi_k(T_1) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{k+1} p_j \pi_{k+1-j}(T_j) x^k = \\
 &= p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(T_1) x^k + \sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(T_j) x^{k+j-1} = \\
 &= p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(T_1) x^k + x^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} p_j x^j \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(T_j) x^k. \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

Z časti 5.3 použijem vytvárajúcu funkciu  $F_{\pi(T_j)}(x)$ , potom

$$\begin{aligned}
 F_p(x) &= p_0 F_{\pi(T_1)}(x) + x^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} p_j x^j F_{\pi(T_j)}(x) = \\
 &= \boxed{p_0 e^{\lambda \tau_1 (x-1)} + x^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} p_j x^j e^{\lambda \tau_j (x-1)}}. \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

## 5.5 Numerické aspekty výpočtu stacionárnych pravdepodobností $p$

V predošlej kapitole som síce odvodil vytvárajúce funkcie, ale ako vidno, nie je možné vyjadriť vytvárajúcu funkciu  $F_p(x)$  explicitne tak, aby na druhej strane znaku rovnosti boli už len známe veličiny. Preto navrhujem počítať pravdepodobnosti numericky, rekurentným spôsobom. Jeden rekurentný spôsob som ukázal na konci predošlej kapitoly. Druhý ukážem teraz.

Prepíšem sústavu rovníc (5.9) na tvar

$$p_{k+1} = \frac{p_k - p_0 \pi_k(T_1) - \sum_{j=1}^k p_j \pi_{k+1-j}(T_j)}{\pi_0(T_{k+1})}, \quad \forall k \in \mathbf{N}_0. \tag{5.15}$$

Rekurentne počítam pravdepodobnosti  $p_k$ , nakoniec ich znormujem, aby súčet bol rovný 1. Nech  $D$  je dostatočne veľké číslo, aby  $p_D$  bolo dostatočne malé, potom nor-

mujem tak, aby

$$1 = \sum_{k=0}^D p_k, \quad (5.16)$$

teda

```
p0 := 1;
for i:=0 to D-1 do pk+1 :=  $\frac{p_k - p_0 \pi_k(T_1) - \sum_{j=1}^k p_j \pi_{k+1-j}(T_j)}{\pi_0(T_{k+1})}$ ;
p :=  $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}^T \mathbf{1}}$ ;
```

Tento spôsob numerického výpočtu pravdepodobností  $\mathbf{p}$  je uvedený v článku [4], kde sa tvrdí, že zložitosť tohto algoritmu je  $O(D^2/2)$ , čo je triviálny dôsledok toho, že matica  $\Pi$  je skoro-trojuholníková.

# Kapitola 6

## Analýza ON/OFF zdroja

Tu začína druhá časť pre iný druh vstupného toku a to toku generovaného ON/OFF zdrojom. V úvode som opísal základné predpoklady ON/OFF zdroja a v tejto časti sa ich pokúsim zhrnúť a zapísať formálne. Ďalej odvodím pravdepodobnosti stavov OFF a ON v čase  $t$ , ako aj pre stacionárny systém. Ešte pripomínam, že kvôli potrebe v ďalších kapitolách mi nestačí uvažovať začiatočnú podmienku v tvare, že zdroj je v čase 0 s istotou zapnutý. Navyše mi treba uvažovať aj prípad, že zdroj je v čase 0 s istotou vypnutý. Toto budem rozlišovať rozdielnym indexovaním.

### 6.1 Predpoklady ON/OFF zdroja

- Zdroj toku pracuje ako prepínač aktívnych (ON, resp. 1) a pasívnych (OFF, resp. 0) periód, t.z. že počas ON periód zdroj vysiela zákazníkov (data, packety, video, audio) a počas OFF periód je nečinný, teda nevysiela nijakých zákazníkov.
- Nech  $T_0$  a  $T_1$  sú navzájom nezávislé spojité náhodné premenné, ktoré vyjadrujú dĺžky ON a OFF periód.
- Prepínanie môžem charakterizovať náhodným procesom  $\{X(t) | X(t) \in \{1, 0\}\}_{t \in \mathbf{R}_{0+}}$ , kde  $X(t)$  je diskrétna náhodná premenná, ktorá popisuje stav systému, v tomto prípade zdroja. Tento náhodný proces je Markovov

reťazec s maticou prechodov

$$\mathbf{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -{}^0\gamma^1 & {}^0\gamma^1 \\ {}^1\gamma^0 & -{}^1\gamma^0 \end{pmatrix}.$$

**Definícia 6.1.1 (Markovov reťazec)** *Markovov reťazec je každý proces  $\{X(t)|X(t) \in \mathbf{S}\}_{t \in \mathbf{T}}$ , ktorý má tieto vlastnosti:*

1.  $\mathbf{T} = \mathbf{R}_{0+}$ ,
2.  $\mathbf{S} = \{s_k | k \in \mathbf{N}_0\}$  je spočítateľná,
3. proces má Markovovu vlastnosť, t.j. pre  $\forall s_k \in \mathbf{S}$  a  $\forall t_j \in \mathbf{T}$  také, že  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$ , platí:

$$\begin{aligned} P(X(t_m) = s_m | X(t_{m-1}) = s_{m-1}, \dots, X(t_{m-k}) = s_{m-k}) = \\ = P(X(t_m) = s_m | X(t_{m-1}) = s_{m-1}). \end{aligned}$$

- Nech  ${}^j\mathbf{r}^i(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(X(t) = i) \wedge (X(0) = j)$ , pričom  $i, j \in \{0, 1\}$ , vyjadruje pravdepodobnosť, že systém (zdroj) je v čase  $t$  v stave  $i$ , ak v čase 0 bol v stave  $j$  a nech  $\mathbf{r}^i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} {}^j\mathbf{r}^i(t)$ , ak limita existuje, vyjadruje pravdepodobnosť, že stacionárny systém (zdroj) je v stave  $i$ . Ľavý horný index som vynechal, pretože stacionárne pravdepodobnosti nezávisia na začiatočných podmienkach.
- Nech  ${}^j\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} ({}^{1,0}), & \text{ak } j=0, \\ ({}^{0,1}), & \text{ak } j=1, \end{cases}$  je vektor pravdepodobností, čo zodpovedá začiatočnej podmienke, že zdroj je v čase 0 v stave  $j$ .
- Nech

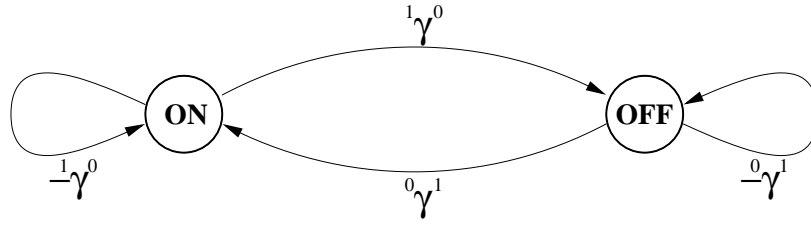
$${}^j\mathbf{r}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} {}^j\mathbf{r}^0(t) \\ {}^j\mathbf{r}^1(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{r}^0 \\ \mathbf{r}^1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} {}^j\mathbf{r}(t), \quad \text{ak limita existuje.}$$

## 6.2 Rovnice pre ${}^j\mathbf{r}^0(t)$ a ${}^j\mathbf{r}^1(t)$ , ich riešenie

### 6.2.1 Rovnice a riešenie bez predpokladu stacionárnosti zdroja

V tejto časti odvodím a vyriešim rovnice pre pravdepodobnosti systému v stave 0 a 1. Výsledok využijem ďalej pre odvodenie ustálených pravdepodobností.





Obr. 6.1: Prechodový graf ON/OFF zdroja.

Podľa predpokladu v časti 6.1 proces  $\{X(t)|X(t) \in \{0, 1\}\}_{t \in \mathbf{R}_{0+}}$  príchodov udalostí typu OFF alebo ON je Markovov reťazec. Pretože môžu nastať len dva stavy, prechodový graf bude mať tiež len dva stavy a to 0 a 1, ako je to možno vidieť v obr. 6.1.

Kolmogorovove diferenciálne rovnice zapísané v maticovom tvare sú

$$\frac{d j_{\mathbf{r}}(t)^{\mathbf{T}}}{dt} = j_{\mathbf{r}}(t)^{\mathbf{T}} \mathbf{\Gamma} \quad (6.1)$$

a začiatočné podmienky

$$j_{\mathbf{r}}(0) = j_{\mathbf{r}}. \quad (6.2)$$

Prepísané po zložkách dostávam sústavu Kolmogorovových diferenciálnych rovníc v tvare

$$\begin{aligned} \frac{d j_{\mathbf{r}^0}(t)}{dt} &= -j_{\mathbf{r}^0}(t)^0 \gamma^1 + j_{\mathbf{r}^1}(t)^1 \gamma^0, \\ \frac{d j_{\mathbf{r}^1}(t)}{dt} &= j_{\mathbf{r}^0}(t)^0 \gamma^1 - j_{\mathbf{r}^1}(t)^1 \gamma^0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

a začiatočné podmienky

$$j_{\mathbf{r}^0}(0) = j_{\mathbf{r}^0}, \quad j_{\mathbf{r}^1}(0) = j_{\mathbf{r}^1}. \quad (6.4)$$

Zo sústavy diferenciálnych rovníc (6.3) a faktu, že  $j_{\mathbf{r}^1}(t) + j_{\mathbf{r}^0}(t) = 1$  prejdeme ku

$$\frac{d j_{\mathbf{r}^0}(t)}{dt} = -j_{\mathbf{r}^0}(t)[{}^0\gamma^1 + {}^1\gamma^0] + {}^1\gamma^0. \quad (6.5)$$

Riešením je

$$\begin{aligned} j_{\mathbf{r}^0}(t) &= \boxed{\frac{{}^1\gamma^0}{{}^0\gamma^1+{}^1\gamma^0} + [j_{\mathbf{r}^0} - \frac{{}^1\gamma^0}{{}^0\gamma^1+{}^1\gamma^0}] e^{-(^0\gamma^1+{}^1\gamma^0)t}}, \\ j_{\mathbf{r}^1}(t) &= \boxed{\frac{{}^0\gamma^1}{{}^0\gamma^1+{}^1\gamma^0} + [j_{\mathbf{r}^1} - \frac{{}^0\gamma^1}{{}^0\gamma^1+{}^1\gamma^0}] e^{-(^0\gamma^1+{}^1\gamma^0)t}}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

### 6.2.2 Riešenie pre stacionárny zdroj

Z tvaru pravdepodobností (6.6) je vidno, že bez ohľadu na voľbu  ${}^0\gamma^1$  a  ${}^1\gamma^0$ , existuje ich limita pre  $t \rightarrow \infty$ . Limitným prechodom  $j_{\mathbf{r}^0}(t)$ ,  $j_{\mathbf{r}^1}(t)$  pre  $t \rightarrow \infty$  dostanem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} j_{\mathbf{r}^0}(t) = \boxed{\frac{{}^1\gamma^0}{{}^0\gamma^1+{}^1\gamma^0}}, \\ \mathbf{r}^1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} j_{\mathbf{r}^1}(t) = \boxed{\frac{{}^0\gamma^1}{{}^0\gamma^1+{}^1\gamma^0}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

## 6.3 Rozdelenie dĺžok períód $T_0$ a $T_1$

V tejto časti ukážem, aké rozdelenie pravdepodobnosti majú dĺžky períód  $T_0$  a  $T_1$  v uvažovanom Markovovom modeli.

Uvažujem pravdepodobnosť, že dĺžka períódy ON je väčšia, alebo rovná  $t + \Delta t$ . Potom

$$\begin{aligned} P(T_1 \geq t + \Delta t) &= P(T_1 \geq t)P(X(a + \Delta t) = 1/X(a) = 1), & \text{potom} \\ P(T_1 \geq t + \Delta t) &= P(T_1 \geq t)(1 - {}^1\gamma^0\Delta t + o(\Delta t)). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Nech  $F_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} P(T_1 \geq t)$ , potom rovnica (6.8) prejde na tvar

$$\begin{aligned} F_1(t + \Delta t) &= F_1(t)(1 - {}^1\gamma^0\Delta t + o(\Delta t)), & \text{potom} \\ \frac{F_1(t + \Delta t) - F_1(t)}{\Delta t} &= -{}^1\gamma^0 F_1(t). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Limitným prechodom pre  $\Delta t \rightarrow 0$  prejde diferenčná rovnica (6.9) na diferenciálnu rovnicu

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F_1(t + \Delta t) - F_1(t)}{\Delta t} \right\} = F_1(t)(-{}^1\gamma^0 + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}), \quad \text{potom}$$

$$\frac{dF_1(t)}{dt} = -{}^1\gamma^0 F_1(t). \quad (6.10)$$

Začiatočná podmienka pre  $F_1(0) = 1$  zodpovedá pravdepodobnosti, že doba trvania periódy ON je isto väčšia, alebo rovná 0.

Riešenie pre diferenciálnu rovnicu (6.10) a začiatočnú podmienku  $F_1(0) = 1$  je

$$F_1(t) = e^{-{}^1\gamma^0 t}. \quad (6.11)$$

Teda

$$\begin{aligned} P(T_1 \geq t) &= e^{-{}^1\gamma^0 t}, & \text{resp.} \\ P(T_1 < t) &= 1 - e^{-{}^1\gamma^0 t}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Z toho vidno, že  $T_1$  má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti

$$\boxed{T_1 \sim \exp({}^1\gamma^0)}. \quad (6.13)$$

Považujem za zaujímavé poznamenať, že potom stredná hodnota  $E(T_1) = \frac{1}{{}^1\gamma^0}$ . Podobne by som ukázal platnosť analogického tvrdenia pre  $T_0$  a ukázal by som, že platí  $T_0 \sim \exp({}^0\gamma^1)$  a  $E(T_0) = \frac{1}{{}^0\gamma^1}$ .

---

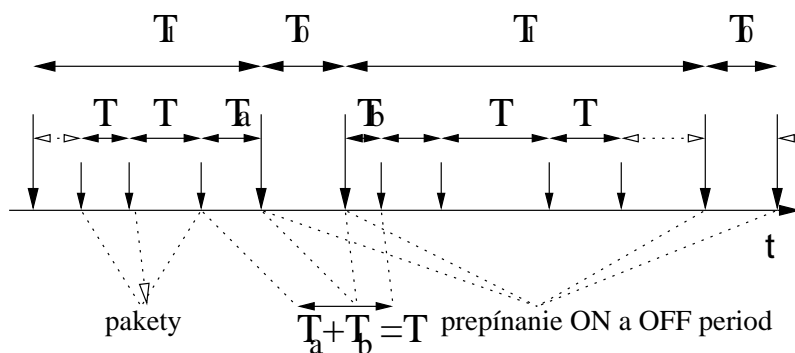
<sup>1</sup>V zmysle týchto označení môžem rovnice (6.6) prepísať na

$$\begin{aligned} j_{\mathbf{r}^0}(t) &= \frac{E(T_0)}{E(T_0) + E(T_1)} + [j_{\mathbf{r}^0} - \frac{E(T_0)}{E(T_0) + E(T_1)}] e^{-(E(T_0)^{-1} + E(T_1)^{-1})t}, \\ j_{\mathbf{r}^1}(t) &= \frac{E(T_1)}{E(T_0) + E(T_1)} + [j_{\mathbf{r}^1} - \frac{E(T_1)}{E(T_0) + E(T_1)}] e^{-(E(T_0)^{-1} + E(T_1)^{-1})t}. \end{aligned}$$

# Kapitola 7

## Analýza MMPP (Markov Modulated Poisson Process)

V tejto kapitole budem skúmať MMPP vstupný tok, ktorý sa bežne používa na opísanie vstupného toku pri ATM sieťach. MMPP je opísaný v mnohých prácach, ale špeciálne v [9], kde je uvedená jeho definícia. MMPP modelmi sa zaoberali aj v [7] a [8]. Snahou je odvodiť pravdepodobnosti stavov systému, pričom tento výsledok využijem v nasledujúcich kapitolách na odvodenie pravdepodobností systému, v ktorom je zahrnutá aj linka. V obr. 7.1 je ukázané prepínanie ON/OFF periód a príchod udalostí počas ON periódy.



Obr. 7.1: Striedanie ON a OFF periód a príchod udalostí počas ON periódy.

## 7.1 Predpoklady

- Predpokladám ON/OFF zdroj, ktorý počas ON periódy vysiela udalosti.
- Nech  $T$  je spojitá náhodná premenná popisujúca dĺžku intervalu medzi dvomi príhodmi udalostí za predpokladu, že zdroj je v stave ON a nech  $T \sim \exp(\lambda)$ .
- Nech  $\{N(t) | N(t) \in \mathbf{N}_0 \times \{0, 1\}\}_{t \in \mathbf{R}_{0+}}$  je náhodný proces, ktorý popisuje stav systému v čase  $t$ , pričom stav systému je definovaný dvojicou  $(a, b)$ , kde  $a$  vyjadruje počet udalostí, ktoré nastali do času  $t$  a  $b$  vyjadruje, že zdroj je v stave OFF, resp. ON. Proces je modulovaný Poissonov proces, pričom matica prechodov je štvorcová nekonečnodimenzionálna bloková matica tvaru

$$\mathbf{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -{}^0\gamma^1 & {}^0\gamma^1 \\ {}^1\gamma^0 & -\lambda - {}^1\gamma^0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \cdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -{}^0\gamma^1 & {}^0\gamma^1 \\ {}^1\gamma^0 & -\lambda - {}^1\gamma^0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & \cdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -{}^0\gamma^1 & {}^0\gamma^1 \\ {}^1\gamma^0 & -\lambda - {}^1\gamma^0 \end{pmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pre jednoduchosť robenia formálnych operácií, zavádzam pomocné štvorcové matice typu  $2 \times 2$ , pričom  $\mathbf{\Gamma}$  je definovaná rovnako ako v kapitole 6

$$\mathbf{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -{}^0\gamma^1 & {}^0\gamma^1 \\ {}^1\gamma^0 & -{}^1\gamma^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Potom matica  $\mathbf{\Omega}$  prejde na tvar

$$\mathbf{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Lambda} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Nech  ${}^j\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} (1, 0)^T$ , pre  $j = 0$  a  ${}^j\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)^T$ , pre  $j = 1$ , ako v predošlej kapitole.

- Nech  ${}^j_0\mathbf{v}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} P((N(0) = (0, j)) \wedge (N(t) = (k, i)))$ , pre  $i, j \in \{0, 1\}$ , vyjadruje pravdepodobnosť, že v čase 0 je ON/OFF zdroj v stave  $j$  a v systéme je 0 zákazníkov a súčasne, že ON/OFF zdroj je v čase  $t$  v stave  $i$  a v systéme je  $k$  zákazníkov.
- Nech  ${}^j_0\mathbf{v}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} P((N(0) = (0, j)) \wedge ((N(t) = (k, 0)) \vee (N(t) = (k, 1))))$  vyjadruje pravdepodobnosť, že systém s ON/OFF zdrojom je v čase  $t$  v stave  $k$  a v čase 0 bolo v systéme 0 zákazníkov a zdroj bol v stave  $j$ .
- Nech  ${}^j_0\mathbf{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (({}^j_0\mathbf{v}_0^0(t), {}^j_0\mathbf{v}_0^1(t)), ({}^j_0\mathbf{v}_1^0(t), {}^j_0\mathbf{v}_1^1(t)), ({}^j_0\mathbf{v}_2^0(t), {}^j_0\mathbf{v}_2^1(t)), \dots)^T$ .
- Nech  ${}^j_0\mathbf{v}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} ({}^j_0\mathbf{v}_k^0(t), {}^j_0\mathbf{v}_k^1(t))^T$ .
- Nech

$${}^{11}\mathbf{v}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} {}^1_0\mathbf{v}_k^0(t) & {}^1_0\mathbf{v}_k^1(t) \\ {}^1_0\mathbf{v}_k^0(t) & {}^1_0\mathbf{v}_k^1(t) \end{pmatrix}, \quad {}^{01}\mathbf{v}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} {}^0_0\mathbf{v}_k^0(t) & {}^0_0\mathbf{v}_k^1(t) \\ {}^1_0\mathbf{v}_k^0(t) & {}^1_0\mathbf{v}_k^1(t) \end{pmatrix}.$$

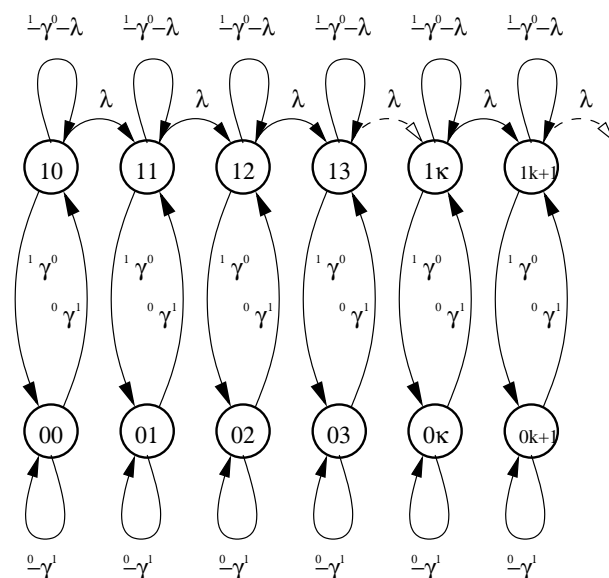
## 7.2 Maticová exponenciála, vlastnosti

V ďalšej časti narábam s maticovou exponenciálnou funkciou a preto uvádzam niektoré základné vlastnosti exponenciálnej funkcie pre matice, ktoré sú viac-menej analogické so skalárovou exponenciálnou funkciou. Tvrdenia sú bez dôkazov, aj keď dôkazy sú viac-menej triviálne.

**Definícia 7.2.1 (Maticová exponenciála)** *Nech  $\mathbf{A}$  je štvorcová matica, potom  $e^{\mathbf{A}}$  nazývam maticovou exponenciálnou funkciou, ktorú definujem ako  $e^{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$ .*

**Veta 7.2.1 (Vlastnosti maticovej exponenciáli)** *Nech  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  sú dve štvorcové matice rovnakého rozmeru, potom*

1.  $e^{\mathbf{A}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{n})^n$ ,
2.  $e^{\mathbf{A}}$  je vždy regulárna, pričom  $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$ ,
3.  $\frac{d e^{\mathbf{A}(t)}}{dt} = \frac{d \mathbf{A}(t)}{dt} e^{\mathbf{A}(t)} = e^{\mathbf{A}(t)} \frac{d \mathbf{A}(t)}{dt}$ ,
4. *nech  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , potom  $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ ,*



Obr. 7.2: Prechodový graf MMPP.

5.  $(e^{\mathbf{A}})^{\mathbf{T}} = e^{(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})}$ ,
6.  $e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}$  je vždy ortonormálna matica,
7. nech  $\mathbf{A}$  je regulárna, potom  $\int e^{\mathbf{A}t} dt = \mathbf{A}^{-1}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}^{-1}$ ,
8.  $\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\text{tr}(\mathbf{A})}$ , kde  $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ ,
9. nech  $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)\mathbf{B}^{-1}$ , kde  $\mathbf{D}$  je diagonálna matica, potom  $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{B}\mathbf{D}(e^{a_1}, e^{a_2}, e^{a_3}, \dots, e^{a_n})\mathbf{B}^{-1}$ ,
10. nech všetky vlastné čísla matice  $\mathbf{A}$  sú záporné, potom  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}t} = 0$ .

### 7.3 Rovnice pre pravdepodobnosti ${}_0^j\mathbf{v}(t)$ , ich riešenie všeobecne

Prechodový graf je znázornený v obr. 7.2 a zodpovedá matici prechodov  $\mathbf{\Omega}$ , podľa ktorej môžeme zapísať sústavu Kolmogorovových diferenciálnych rovníc v maticovom

tvare, využijúc zavedené označenie, ako

$$\frac{d {}^j_0 \mathbf{v}(t)^\top}{dt} = {}^j_0 \mathbf{v}(t)^\top \mathbf{\Omega} \quad (7.1)$$

a začiatočná podmienka je

$${}^j_0 \mathbf{v}(0)^\top = ({}^j \mathbf{r}, (0, 0), (0, 0), \dots). \quad (7.2)$$

Ak si všimnem blokovú štruktúru matice  $\mathbf{\Omega}$ , môžem sústavu (7.1) prepísať na

$$\frac{d {}^j_0 \mathbf{v}_0(t)^\top}{dt} = {}^j_0 \mathbf{v}_0(t)^\top (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda}), \quad (7.3)$$

$$\frac{d {}^j_0 \mathbf{v}_k(t)^\top}{dt} = {}^j_0 \mathbf{v}_{k-1}(t)^\top \mathbf{\Lambda} + {}^j_0 \mathbf{v}_k(t)^\top (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda}), \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad (7.4)$$

a začiatočné podmienky sú

$${}^j_0 \mathbf{v}_0(0)^\top = {}^j \mathbf{r}, \quad (7.5)$$

$${}^j_0 \mathbf{v}_k(0)^\top = (0, 0), \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (7.6)$$

Najskôr riešim homogénny systém tvaru

$$\frac{d {}^j_0 \mathbf{v}_k(t)^\top}{dt} = {}^j_0 \mathbf{v}_k(t)^\top (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda}), \quad \forall k \in \mathbf{N}_0. \quad (7.7)$$

Riešenie homogénneho systému (7.7) bude mať tvar

$${}^j_0 \mathbf{v}_k(t)^\top = {}^j \mathbf{r}_k^\top e^{(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda})t}, \quad (7.8)$$

kde  ${}^j \mathbf{r}_k$  je nejaký stĺpcový vektor. Správnosť riešenia sa ľahko overí dosadením.

Pre  $k = 0$  môžem určiť  ${}^j \mathbf{r}_k$  z podmienky (7.5) ako

$$\begin{aligned} {}^j_0 \mathbf{v}_0(0)^\top &= {}^j \mathbf{r}^\top = {}^j \mathbf{r}_0^\top e^{(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda})0}, & \text{potom} \\ {}^j \mathbf{r}_0^\top &= {}^j \mathbf{r}^\top. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Metódou variácie konštánt budem riešiť nehomogénny systém (7.4), pričom  ${}^j \mathbf{r}_k$



chápem odteraz ako funkciu času  ${}^j\mathbf{r}_k(t)$  a riešenie  ${}^j\mathbf{v}_k(t)$  predpokladám mať tvar

$${}^j\mathbf{v}_k(t)^\top = {}^j\mathbf{r}_k(t)^\top e^{(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})t}, \quad (7.10)$$

potom po dosadení do (7.4) dostávam  $\forall k \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} & \frac{d {}^j\mathbf{r}_k(t)^\top}{dt} e^{(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})t} + {}^j\mathbf{r}_k(t)^\top e^{(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})t} (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda}) = \\ = & {}^j\mathbf{r}_{k-1}(t)^\top e^{(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})t} \mathbf{\Lambda} + {}^j\mathbf{r}_k(t)^\top e^{(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})t} (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda}), \quad \text{potom} \\ & \frac{d {}^j\mathbf{r}_k(t)^\top}{dt} e^{(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})t} = {}^j\mathbf{r}_{k-1}(t)^\top e^{(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})t} \mathbf{\Lambda}, \\ & \frac{d {}^j\mathbf{r}_k(t)^\top}{dt} = {}^j\mathbf{r}_{k-1}(t)^\top e^{(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})t} \mathbf{\Lambda} e^{-(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})t}, \\ & {}^j\mathbf{r}_k(t)^\top = {}^j\mathbf{r}_k(0)^\top + \int_0^t {}^j\mathbf{r}_{k-1}(s)^\top e^{(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})s} \mathbf{\Lambda} e^{-(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})s} ds. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Zo začiatkovej podmienky (7.6) vyplýva

$$\begin{aligned} {}^j\mathbf{v}_k(0)^\top &= (0, 0) = {}^j\mathbf{r}_k(0)^\top e^{(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Lambda})0}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad \text{potom} \\ {}^j\mathbf{r}_k(0)^\top &= (0, 0), \end{aligned} \quad (7.12)$$

označím ešte

$$\mathbf{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} -(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda}), \quad (7.13)$$

potom

$${}^j\mathbf{r}_k(t)^\top = \int_0^t {}^j\mathbf{r}_{k-1}(s)^\top e^{-\mathbf{\Phi}s} \mathbf{\Lambda} e^{\mathbf{\Phi}s} ds. \quad (7.14)$$

**Tvrdenie**

$${}^j\mathbf{r}_k(t)^\top = {}^j\mathbf{r}^\top \frac{(\int_0^t e^{-\mathbf{\Phi}s} \mathbf{\Lambda} e^{\mathbf{\Phi}s} ds)^k}{k!}. \quad (7.15)$$

Dôkaz.

Dôkaz spravím matematickou indukciou vzhľadom na  $k$ .

1. Pre  $k = 0$  vyplýva z (7.15), že

$${}^j\mathbf{r}_0(t)^\top = {}^j\mathbf{r}^\top. \quad (7.16)$$

Toto tvrdenie je v súlade so (7.9).

2. Ďalej pre  $(k - 1)$  predpokladám, že platí dokazovaná vlastnosť

$$j_{\mathbf{r}_{k-1}}(t) = j_{\mathbf{r}^T} \frac{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (7.17)$$

Potom

$$\begin{aligned} j_{\mathbf{r}_k}(t)^T &= \int_0^t j_{\mathbf{r}_{k-1}}(t)^T e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds, & \text{potom} \\ j_{\mathbf{r}_k}(t)^T &= \int_0^t j_{\mathbf{r}^T} \frac{(\int_0^s e^{-\Phi s_1} \Lambda e^{\Phi s_1} ds_1)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Označím

$$\mathbf{U}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^s e^{-\Phi s_1} \Lambda e^{\Phi s_1} ds_1, \quad \text{potom} \quad (7.19)$$

$$\frac{d\mathbf{U}(s)}{ds} = e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} \quad (7.20)$$

a môžem rovnicu (7.18) prepísať na tvar

$$j_{\mathbf{r}_k}(t)^T = \int_0^t j_{\mathbf{r}^T} \frac{\mathbf{U}(s)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d\mathbf{U}(s)}{ds} ds, \quad \text{resp.} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} j_{\mathbf{r}_k}(t)^T &= \int_{\mathbf{U}(0)}^{\mathbf{U}(t)} j_{\mathbf{r}^T} \frac{\mathbf{U}^{k-1}}{(k-1)!} d\mathbf{U} = j_{\mathbf{r}^T} \frac{\mathbf{U}(t)^k}{k!} - j_{\mathbf{r}^T} \frac{\mathbf{U}(0)^k}{k!} = \\ &= j_{\mathbf{r}^T} \frac{\mathbf{U}(t)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Z toho okamžite dostávam

$$j_{\mathbf{r}_k}(t)^T = j_{\mathbf{r}^T} \frac{\mathbf{U}(t)^k}{(k)!}, \quad \text{resp.} \quad (7.23)$$

$$j_{\mathbf{r}_k}(t)^T = j_{\mathbf{r}^T} \frac{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!}. \quad (7.24)$$

□

Potom po dosadení výsledku z rovnice (7.24) do rovnice (7.10) dostávam riešenie pre  ${}^j_0 \mathbf{v}_k(t)$

$${}^j_0 \mathbf{v}_k(t)^T = \boxed{j_{\mathbf{r}^T} \frac{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi t}}. \quad (7.25)$$

Ak by som chcel pravdepodobnosť bytia systému v čase  $t$  v stave  $k$  za predpokladu, že zdroj je v stave OFF, resp. ON, pravdepodobnosti by vyzerali takto

$${}^j_0\mathbf{v}_k^i(t) = \boxed{{}^j_{\mathbf{r}}\Gamma \frac{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi t} i_{\mathbf{r}}}. \quad (7.26)$$

V jednej z nasledujúcich kapitol budem potrebovať vedieť tvar matice  ${}^{11}\mathbf{v}_k(t)$  a  ${}^{01}\mathbf{v}_k(t)$ , ktoré majú takéto tvar

$${}^{11}\mathbf{v}_k(t) = \begin{pmatrix} {}^1_0\mathbf{v}_k^0(t) & {}^1_0\mathbf{v}_k^1(t) \\ {}^0_0\mathbf{v}_k^0(t) & {}^0_0\mathbf{v}_k^1(t) \end{pmatrix}, \quad {}^{01}\mathbf{v}_k(t) = \begin{pmatrix} {}^0_0\mathbf{v}_k^0(t) & {}^0_0\mathbf{v}_k^1(t) \\ {}^1_0\mathbf{v}_k^0(t) & {}^1_0\mathbf{v}_k^1(t) \end{pmatrix}.$$

Najskôr sa budem zaoberať maticou  ${}^{01}\mathbf{v}_k(t)$ . Z rovnice (7.26) bezprostredne vyplýva, že

$${}^{01}\mathbf{v}_k(t) = \frac{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi t}. \quad (7.27)$$

Evidentné je, že

$${}^{11}\mathbf{v}_k(t) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) {}^{01}\mathbf{v}_k(t), \quad \text{potom} \quad (7.28)$$

$${}^{11}\mathbf{v}_k(t) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \frac{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi t}. \quad (7.29)$$

Pravdepodobnosť, že systém je v čase  $t$  v stave  $k$  je

$${}^j_0\mathbf{v}_k(t) = \boxed{{}^j_0\mathbf{v}_k(t)^T \mathbf{1}}. \quad (7.30)$$

Ak si všimnem riešenie pre pravdepodobnosti stavov Poissonovho vstupného toku a Poissonovho modulovaného vstupného toku, vidím istú analógiu v tvaroch týchto pravdepodobností.

Kvôli kontrole a lepšiemu pochopeniu okolností tvrdím nasledovné aj s dôkazom.

**Veta 7.3.1 (Stochastickosť)** *Súčet matíc  ${}^{01}\mathbf{v}_k(t)$  cez všetky  $k \in \mathbf{N}_0$  je stochastická matica v riadkovom zmysle, resp.*

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} {}^{01}\mathbf{v}_k(t) \right) \mathbf{1} = \mathbf{1}. \quad (7.31)$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} {}^{01}\mathbf{v}_k(t)\mathbf{1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi t} \mathbf{1} = \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} \right) e^{-\Phi t} \mathbf{1} = e^{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)} e^{-\Phi t} \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Ďalej derivujem podľa  $t$

$$\begin{aligned} \frac{d \sum_{k=0}^{\infty} {}^{01}\mathbf{v}_k(t)\mathbf{1}}{dt} &= \frac{d e^{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)} e^{-\Phi t} \mathbf{1}}{dt} = \\ &= e^{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)} e^{-\Phi t} \Lambda e^{+\Phi t} e^{-\Phi t} \mathbf{1} + e^{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)} e^{-\Phi t} (-\Phi) \mathbf{1} = \\ &= e^{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)} e^{-\Phi t} [\Lambda - \Phi] \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Vzhľadom na to, že  $[\Lambda - \Phi] = \Gamma$ , dostávam

$$\frac{d \sum_{k=0}^{\infty} {}^{01}\mathbf{v}_k(t)\mathbf{1}}{dt} = e^{(\int_0^t e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)} e^{-\Phi t} \Gamma \mathbf{1}. \quad (7.34)$$

Vzhľadom na tvar matice  $\Gamma$  platí, že  $\Gamma \mathbf{1} = \mathbf{0}$  a teda

$$\frac{d \sum_{k=0}^{\infty} {}^{01}\mathbf{v}_k(t)\mathbf{1}}{dt} = \mathbf{0} \quad (7.35)$$

Zistil som, že vektor  $(\sum_{k=0}^{\infty} {}^{01}\mathbf{v}_k(t))\mathbf{1}$  je konštantný vzhľadom na čas  $t$ . Treba ešte ukázať, že tým konštantným vektorom je vektor  $\mathbf{1}$ . To je triviálne, pretože evidentne pre čas  $t = 0$  platí, že  $(\sum_{k=0}^{\infty} {}^{01}\mathbf{v}_k(0))\mathbf{1} = \mathbf{1}$ , čo je možno vidieť z rovnice (7.32). Aby som vylúčil prípad po častiach konštantného vektora, využijem spojitosť vektora  $(\sum_{k=0}^{\infty} {}^{01}\mathbf{v}_k(t))\mathbf{1}$  vzhľadom na čas  $t$ , z čoho vyplýva dokazované tvrdenie.

□

Ako dôsledok predošlej vety triviálne platí rovnaké tvrdenie, teda že matica  $(\sum_{k=0}^{\infty} {}^{11}\mathbf{v}_k(t))\mathbf{1}$  je tiež stochastická v riadkovom zmysle.

# Kapitola 8

## MMPP $|M_k|1|\infty$

V tejto kapitole analyzujem model MMPP $|M_k|1|\infty$ , t.j. jednolinkový systém s modulovaným Poissonovým vstupným tokom, ktorým sa zaoberám v kapitole 7, s Markovovskou obsuhou závislou na počte zákazníkov v systéme, čo vyjadruje index  $k$  pri písmene M. Najskôr spomeniem predpoklady, potom odvodím rovnice pre pravdepodobnosti bytia systému v nejakom stave za predpokladu bytia zdroja v stave OFF, resp. ON.

### 8.1 Predpoklady, označenie

- Nech vstupný tok je typu MMPP z kapitoly 7. Nech platí označenie z predošlých kapitol súvisiacich s MMPP.
- Predpokladám jednu obslužnú linku, ktorej dobu obsluhy nech popisuje náhodná premenná  $T_j$  a nech sa riadi  $T_j \sim \exp(\eta_j)$  rozdelením pravdepodobnosti, kde  $j$  vyjadruje počet zákazníkov v systéme.
- Nech  $\{Y(t)|Y(t) \in \mathbf{N}_0 \times \{0, 1\}\}_{t \in \mathbf{R}_{0+}}$  je náhodný proces, kde  $Y(t)$  je náhodná premenná (dvojprvkový vektor), ktorá popisuje stav systému. Prvá zložka popisuje počet zákazníkov v systéme v čase  $t$  a druhá zložka popisuje, či zdroj je v stave OFF, resp. ON. Proces je súčasne Markovovým reťazcom, pričom matica

prechodov je štvorcová nekonečnodimenzionálna bloková matica tvaru

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \Gamma - \Lambda & \Lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{E}_1 & \Gamma - \Lambda - \mathbf{E}_1 & \Lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{E}_2 & \Gamma - \Lambda - \mathbf{E}_2 & \Lambda & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{E}_3 & \Gamma - \Lambda - \mathbf{E}_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

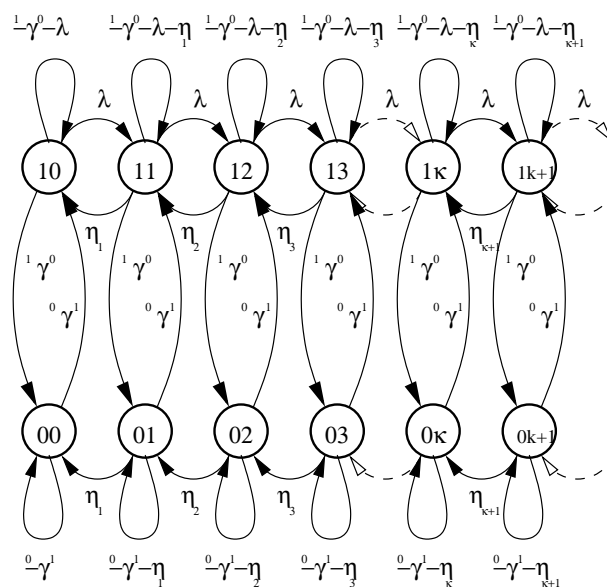
kde  $\Gamma$ ,  $\Lambda$  a  $\mathbf{E}_k$  sú štvorcové matice typu  $2 \times 2$ , podobne ako v kapitole 7 a majú tvar

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -{}^0\gamma^1 & {}^0\gamma^1 \\ {}^1\gamma^0 & -{}^1\gamma^0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \eta_k & 0 \\ 0 & \eta_k \end{pmatrix}.$$

- Nech  ${}^j_0p_k^i(t) \stackrel{\text{def}}{=} P((Y(0) = (0, j)) \wedge (Y(t) = (k, i)))$ , pre  $i, j \in \{0, 1\}$ , vyjadruje pravdepodobnosť, že v čase 0 je ON/OFF zdroj v stave  $j$  a v systéme je 0 zákazníkov a súčasne, že ON/OFF zdroj je v čase  $t$  v stave  $i$  a v systéme je  $k$  zákazníkov a nech  $p_k^i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} {}^j_0p_k^i(t)$  vyjadruje pravdepodobnosť, že v stacionárnom systéme je  $k$  zákazníkov a zdroj je v stave  $i$ . Stacionárne pravdepodobnosti už nezávisia na začiatočnej podmienke a preto som vypustil indexy týkajúce sa začiatočnej podmienky.
- Nech  ${}^j_0p_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} {}^j_0p_k^0(t) + {}^j_0p_k^1(t)$  vyjadruje pravdepodobnosť, že systém s ON/OFF zdrojom je v čase  $t$  v stave  $k$  a v čase 0 bolo v systéme 0 zákazníkov a zdroj bol v stave  $j$ .
- Nech  ${}^j_0\mathbf{p}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (({}^j_0p_0^0(t), {}^j_0p_0^1(t)), ({}^j_0p_1^0(t), {}^j_0p_1^1(t)), ({}^j_0p_2^0(t), {}^j_0p_2^1(t)), \dots)^T$  a nech  $\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} {}^j_0\mathbf{p}(t)$ , ak limita existuje.
- Nech  ${}^j_0\mathbf{p}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} ({}^j_0p_k^0(t), {}^j_0p_k^1(t))^T$  a nech  $\mathbf{p}_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} {}^j_0\mathbf{p}_k(t)$ , ak limita existuje.

## 8.2 Model, rovnice pre pravdepodobnosti p pre stacionárny model

Pre tento model bude prechodový graf vyzeráť ako je to znázornené v obr. 8.1. Kolmogorovove diferenciálne rovnice pre nestacionárny model zapísané v maticovom



Obr. 8.1: Prechodový graf MMPP|M<sub>k</sub>|1|∞ modelu.

zápise majú tvar

$$\frac{d {}^j_0 \mathbf{p}(t)^T}{dt} = {}^j_0 \mathbf{p}(t)^T \mathbf{\Omega} \quad (8.1)$$

a začiatočné podmienky

$${}^j_0 \mathbf{p}(0) = ({}^j \mathbf{r}, (0, 0), (0, 0), \dots)^T. \quad (8.2)$$

Pre stacionárny model prejde sústava (8.1) na tvar

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}^T \mathbf{\Omega}, \quad (8.3)$$

navyše

$$\mathbf{p}^T \mathbf{1} = 1, \quad (8.4)$$

čo je dôsledkom vety o úplnej pravdepodobnosti.

Sústava (8.3) prepísaná v označení matíc  $\mathbf{\Gamma}$ ,  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{E}_k$  má tvar

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_0^T \mathbf{\Lambda} + \mathbf{p}_1^T \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_{k-1}^T \mathbf{\Lambda} + \mathbf{p}_k^T (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda} - \mathbf{E}_k) + \mathbf{p}_{k+1}^T \mathbf{E}_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (8.5)$$

### 8.3 Numerické aspekty výpočtu

Sústavu (8.5) nie som schopný vyriešiť explicitne a preto nezostáva nič iné ako numerické metódy. Využijem fakt, že  $\mathbf{E}_k$  je  $\eta_k$  násobkom jednotkovej matice, teda  $\mathbf{E}_k$  je regulárna matica a existuje k nej inverzná matica. Sústavu (8.5) môžem potom prepísať na tvar

$$\mathbf{p}_1^T = -\mathbf{p}_0^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_1^{-1}, \quad (8.6)$$

$$\mathbf{p}_{k+1}^T = -\mathbf{p}_{k-1}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_{k+1}^{-1} - \mathbf{p}_k^T (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda} - \mathbf{E}_k) \mathbf{E}_{k+1}^{-1}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad (8.7)$$

$$\mathbf{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{p}_k. \quad (8.8)$$

Platnosť rovnice (8.8) vylýva z vety o toku pravdepodobností pre stacionárne Markovove systémy (rovnako ako aj z vety o úplnej pravdepodobnosti) a z faktu, že pravdepodobnosti ustáleného zdroja vyjadruje vektor  $\mathbf{r}$ .

### 8.4 Model MMPP $|\mathbf{M}|1|\infty$ s konštantnou intenzitou doby obsluhy

Ak by boli všetky  $\eta_k$  rovnaké a rovné  $\eta$ , čiže ak by  $(\forall k \in \mathbf{N})(\eta_k = \eta)$ , tak aj  $\mathbf{E}_k = \mathbf{E}$  a sústava (8.7) prejde na tvar

$$\mathbf{p}_1^T = -\mathbf{p}_0^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^{-1}, \quad (8.9)$$

$$\mathbf{p}_{k+1}^T = -\mathbf{p}_{k-1}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^{-1} - \mathbf{p}_k^T (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda} - \mathbf{E}) \mathbf{E}^{-1}, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad (8.10)$$

$$\mathbf{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{p}_k. \quad (8.11)$$

Sústavu (8.10) môžem chápať ako Fibonacciho postupnosť vektorov s maticovými koeficientmi, pričom vektory  $\mathbf{p}_k$  musia spĺňať podmienku (8.11) a potom riešenie nájdeme nasledujúcim postupom.



Nech  $(i = 1, 2)((\mathbf{A}_i|\mathbf{\Lambda} + \mathbf{A}_i(\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Lambda} - \mathbf{E}) + \mathbf{A}_i^2\mathbf{E} = \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{c}_i = \text{konštantný stĺpcový vektor}))$ , potom

$$\mathbf{p}_k^T = \mathbf{c}_1^T \mathbf{A}_1^k + \mathbf{c}_2^T \mathbf{A}_2^k, \quad \text{respektíve} \quad (8.12)$$

$$\mathbf{p}_k^T = (\mathbf{c}_1^T + k\mathbf{c}_2^T) \mathbf{A}_1^k, \quad \text{ak matica } \mathbf{A}_1 \text{ je dvojnásobným koreňom,} \quad (8.13)$$

pričom stĺpcové vektory  $\mathbf{c}_1$  a  $\mathbf{c}_2$  sa určia tak, aby platila rovnica (8.9) a napr. (8.11).

Tým som dostal explicitný výsledok pre model  $\text{MMPP}|M|1|\infty$  s konštantnou intenzitou doby obsluhy. Konvergenciou geometrických radov pre koeficient  $\mathbf{A}_i$  som sa nezaoberal, vyplýva z predpokladu existencie stacionárneho modelu.

# Kapitola 9

## MMPP $|D_k|1|\infty$

V tejto kapitole odvodím rovnice pre pravdepodobnosti  $\mathbf{p}$  stavov stacionárneho systému MMPP $|D_k|1|\infty$ , pričom využijem výsledky z kapitoly 4 a 7.

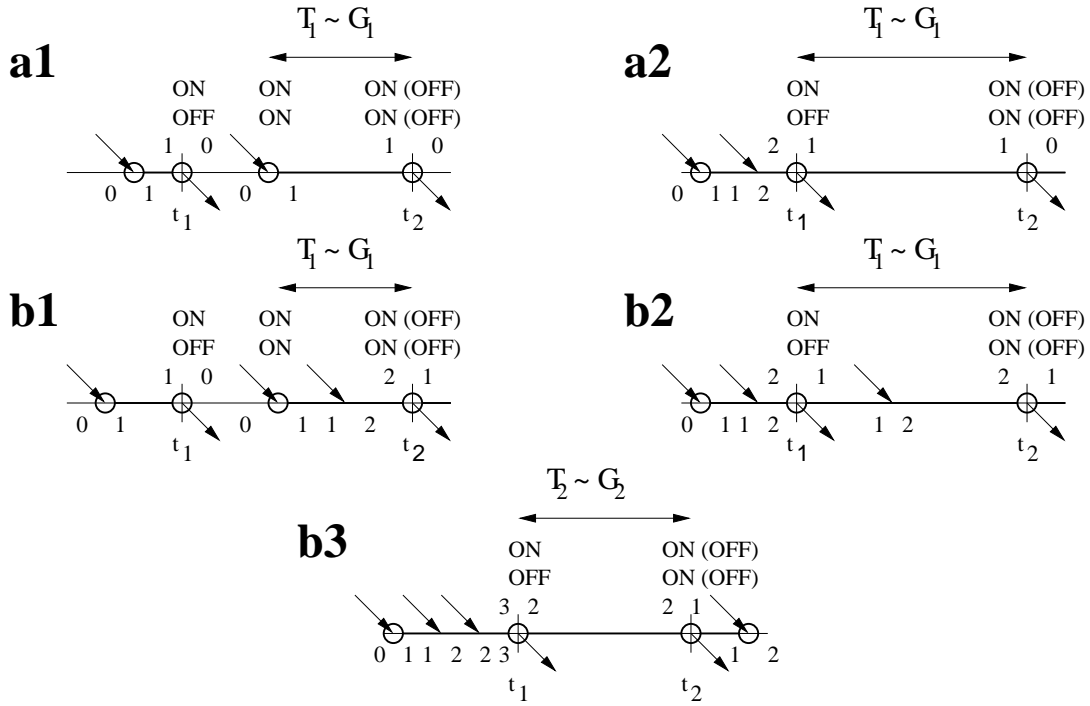
### 9.1 Označenie

- Platia všetky doterajšie označenia.
- Predpokladám modulovaný Poissonov vstupný tok z kapitoly 7.
- Predpokladám jednu obslužnú linku, ktorej doba obsluhy  $T_l$  nech je deterministická v závislosti od počtu zákazníkov v systéme na začiatku obsluhy a tieto doby nech sú rovné  $\tau_l$ , kde  $l$  je počet zákazníkov v systéme.
- Nech  $\{Y(t)|Y(t) \in \mathbf{N}_0 \times \{0, 1\}\}_{t \in \mathbf{R}_{0+}}$  je náhodný proces, kde  $Y(t)$  je náhodná premenná (dvojprvkový vektor), ktorá popisuje stav systému. Prvá zložka popisuje počet zákazníkov v systéme v čase  $t$  a druhá zložka popisuje, či zdroj je v stave OFF, resp. ON v čase  $t$ .
- Nech  ${}^j_0p_k^i(t) \stackrel{\text{def}}{=} P((Y(0) = (0, j)) \wedge (Y(t) = (k, i)))$ , pre  $i, j \in \{0, 1\}$ , vyjadruje pravdepodobnosť, že v čase 0 je ON/OFF zdroj v stave  $j$  a v systéme je 0 zákazníkov a súčasne, že ON/OFF zdroj je v čase  $t$  v stave  $i$  a v systéme je  $k$  zákazníkov a nech  $p_k^i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} {}^j_0p_k^i(t)$  vyjadruje pravdepodobnosť, že v stacionárnom systéme je  $k$  zákazníkov a zdroj je v stave  $i$ . Stacionárne pravde-

podobnosti už nezávisia na začiatkovej podmienke a preto som vypustil indexy týkajúce sa začiatkovej podmienky.

- Nech  ${}^j_0\mathbf{p}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} {}^j_0\mathbf{p}_k^0(t) + {}^j_0\mathbf{p}_k^1(t)$  vyjadruje pravdepodobnosť, že systém s ON/OFF zdrojom je v čase  $t$  v stave  $k$  a v čase 0 bolo v systéme 0 zákazníkov a zdroj bol v stave  $j$ . Značenie má svoju logiku. Indexy hore popisujú stav zdroja a indexy dole popisujú stav systému (počet zákazníkov v systéme). Indexy vľavo popisujú udalosti, ktoré sa udiali v čase 0, teda popisujú začiatkovú podmienku, že v čase 0 bol systém prázdny a zdroj bol v stave  $j$ . Indexy vpravo popisujú udalosti v čase  $t$ , t.j. že v čase  $t$  bolo v systéme  $k$  zákazníkov a zdroj bol v stave  $i$ .
- Nech  ${}^j_0\mathbf{p}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (({}^j_0\mathbf{p}_0^0(t), {}^j_0\mathbf{p}_0^1(t)), ({}^j_0\mathbf{p}_1^0(t), {}^j_0\mathbf{p}_1^1(t)), ({}^j_0\mathbf{p}_2^0(t), {}^j_0\mathbf{p}_2^1(t)), \dots)^T$  a nech  $\mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} {}^j_0\mathbf{p}(t)$ , ak limita existuje.
- Nech  ${}^j_0\mathbf{p}_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} ({}^j_0\mathbf{p}_k^0(t), {}^j_0\mathbf{p}_k^1(t))^T$  a nech  $\mathbf{p}_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} {}^j_0\mathbf{p}_k(t)$ , ak limita existuje.
- Nech  ${}^j_0\pi_k^i(T_l)$ , kde  $i, j \in \{0, 1\}$  a  $k, l \in \mathbf{N}_0$ , označuje pravdepodobnosť, že za dobu obsluhy jedného zákazníka príde  $k$  zákazníkov, ak na začiatku obsluhy bol systém v stave  $l$ , zdroj v stave  $j$  a na konci obsluhy je zdroj v stave  $i$ . Značenie má svoju logiku. Indexy hore popisujú stav zdroja a indexy dole popisujú stav systému (počet zákazníkov v systéme). Indexy vľavo popisujú udalosti, ktoré sa udiali za dobu 0, teda popisujú začiatkovú podmienku, že za nulovú dobu neprišiel nijaký zákazník a zdroj bol na začiatku tejto doby v stave  $j$ . Indexy vpravo popisujú udalosti na konci doby obsluhy  $T_l$ , t.j. že za dobu obsluhy  $T_l$  prišlo  $k$  zákazníkov a zdroj bol v stave  $i$ .
- Nech

$$\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1_0\pi_0^0(T_1) & {}^1_0\pi_0^1(T_1) \\ {}^1_0\pi_0^0(T_1) & {}^1_0\pi_0^1(T_1) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} {}^1_0\pi_1^0(T_1) & {}^1_0\pi_1^1(T_1) \\ {}^1_0\pi_1^0(T_1) & {}^1_0\pi_1^1(T_1) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} {}^1_0\pi_2^0(T_1) & {}^1_0\pi_2^1(T_1) \\ {}^1_0\pi_2^0(T_1) & {}^1_0\pi_2^1(T_1) \end{pmatrix} & \cdots \\ \begin{pmatrix} {}^0_0\pi_0^0(T_1) & {}^0_0\pi_0^1(T_1) \\ {}^1_0\pi_0^0(T_1) & {}^1_0\pi_0^1(T_1) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} {}^0_0\pi_1^0(T_1) & {}^0_0\pi_1^1(T_1) \\ {}^1_0\pi_1^0(T_1) & {}^1_0\pi_1^1(T_1) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} {}^0_0\pi_2^0(T_1) & {}^0_0\pi_2^1(T_1) \\ {}^1_0\pi_2^0(T_1) & {}^1_0\pi_2^1(T_1) \end{pmatrix} & \cdots \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} {}^0_0\pi_0^0(T_2) & {}^0_0\pi_0^1(T_2) \\ {}^1_0\pi_0^0(T_2) & {}^1_0\pi_0^1(T_2) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} {}^0_0\pi_1^0(T_2) & {}^0_0\pi_1^1(T_2) \\ {}^1_0\pi_1^0(T_2) & {}^1_0\pi_1^1(T_2) \end{pmatrix} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$



Obr. 9.1: Analýza modelu  $\text{MMPP}|\text{D}_k|1|\infty$ .

označím

$${}^{11}\Pi_k(T_1) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} {}^1\pi_k^0(T_1) & {}^1\pi_k^1(T_1) \\ {}^1\pi_k^0(T_1) & {}^1\pi_k^1(T_1) \end{pmatrix}, \quad {}^{01}\Pi_k(T_l) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} {}^0\pi_k^0(T_l) & {}^0\pi_k^1(T_l) \\ {}^1\pi_k^0(T_l) & {}^1\pi_k^1(T_l) \end{pmatrix}.$$

Potom matica  $\Pi$  prejde na tvar

$$\Pi = \begin{pmatrix} {}^{11}\Pi_0(T_1) & {}^{11}\Pi_1(T_1) & {}^{11}\Pi_2(T_1) & {}^{11}\Pi_3(T_1) & \dots \\ {}^{01}\Pi_0(T_1) & {}^{01}\Pi_1(T_1) & {}^{01}\Pi_2(T_1) & {}^{01}\Pi_3(T_1) & \dots \\ \mathbf{0} & {}^{01}\Pi_0(T_2) & {}^{01}\Pi_1(T_2) & {}^{01}\Pi_2(T_2) & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{01}\Pi_0(T_3) & {}^{01}\Pi_1(T_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

## 9.2 Rocnice pre pravdepodobnosti ${}_0^j\mathbf{p}(t)$

Podobne, ako v kapitole 4 spravím rozbor udalostí, ktoré môžu nastať. Opäť vo-  
lím interval dvoch po sebe bezprostredne nasledujúcich koncov obsluhy, pretože na

takomto intervale má systém Markovovu vlastnosť, teda to, čo nastane na konci obsluhy nejakého zákazníka závisí od toho, v akom stave bol systém v bezprostredne predchádzajúcom odchode zákazníka a nie od ostatných predošlých odchodov. Nech teda  $t_1$  a  $t_2$  sú dva bezprostredne po sebe nasledujúce odchody zákazníkov zo systému a nech  $t_1 < t_2$ . Obrázok 9.1 popisuje, čo sa môže udiť v intervale  $(t_1+, t_2+)$ . Prípad, že na konci obsluhy bude 0 zákazníkov a zdroj bude v stave ON, je opísaný v podobrázkoch *a1* a *a2*. Prípad *a1* hovorí, že buď (v čase  $t_1$  je v systéme 0 zákazníkov, zdroj je v stave ON a za dobu obsluhy  $T_1$  nepríde nijaký zákazník, pričom na začiatku obsluhy zdroj bol určite v stave ON a na konci musí byť ON), alebo (v čase  $t_1$  je v systéme 0 zákazníkov, zdroj je v stave OFF a za dobu obsluhy  $T_1$  nepríde nijaký zákazník, pričom na začiatku obsluhy zdroj bol určite v stave ON a na konci musí byť ON). Prípad *a2* hovorí, že buď (v čase  $t_1$  je v systéme 1 zákazník, zdroj je v stave ON a za dobu obsluhy  $T_1$  nepríde nijaký zákazník, pričom na začiatku obsluhy zdroj bol určite v stave ON a na konci musí byť ON), alebo (v čase  $t_1$  je v systéme 1 zákazník, zdroj je v stave OFF a za dobu obsluhy  $T_1$  nepríde nijaký zákazník, pričom na začiatku obsluhy zdroj bol určite v stave OFF a na konci musí byť ON). Teda to, že v čase  $t_2$  bude systém prázdny a zdroj v stave ON je zložením oboch prípadov *a1*, aj *a2*, ktoré sú vo vzťahu "Buď, alebo". Prípad *b* by som opísal podobne, ale kvôli zložitosti to nerobím, nakoniec, z obrázka je to zrejmé. Potom rovnice pre pravdepodobnosti systému v časoch odchodov zákazníkov zo systému budú

$$\begin{aligned}
{}_0^j P_0^i(t_2) &= \underbrace{({}_0^j P_0^0(t_1) {}_0^1 \pi_0^i(T_1) + {}_0^j P_0^1(t_1) {}_0^1 \pi_0^i(T_1))}_{a1} + \underbrace{({}_0^j P_1^0(t_1) {}_0^0 \pi_0^i(T_1) + {}_0^j P_1^1(t_1) {}_0^1 \pi_0^i(T_1))}_{a2}, \\
{}_0^j P_1^i(t_2) &= \underbrace{({}_0^j P_0^0(t_1) {}_0^1 \pi_1^i(T_1) + {}_0^j P_0^1(t_1) {}_0^1 \pi_1^i(T_1))}_{b1} + \underbrace{({}_0^j P_1^0(t_1) {}_0^0 \pi_1^i(T_1) + {}_0^j P_1^1(t_1) {}_0^1 \pi_1^i(T_1))}_{b2} + \\
&\quad + \underbrace{({}_0^j P_2^0(t_1) {}_0^0 \pi_0^i(T_2) + {}_0^j P_2^1(t_1) {}_0^1 \pi_0^i(T_2))}_{b3}, \\
{}_0^j P_k^i(t_2) &= ({}_0^j P_0^0(t_1) {}_0^1 \pi_k^i(T_1) + {}_0^j P_0^1(t_1) {}_0^1 \pi_k^i(T_1)) + \sum_{l=1}^{k+1} ({}_0^j P_l^0(t_1) {}_0^0 \pi_{k+1-l}^i(T_l) + \\
&\quad + {}_0^j P_0^1(t_1) {}_0^1 \pi_{k+1-l}^i(T_l)), \quad \forall k \in \mathbf{N}_0
\end{aligned} \tag{9.1}$$

a začiatkové podmienky nie sú podstatné.

Sústava 9.1 zapísaná v maticovom tvare bude

$${}^j_0\mathbf{p}(t_2)^\top = {}^j_0\mathbf{p}(t_1)^\top \Pi. \quad (9.2)$$

Pre ďalšie odvodzovanie je ale vhodný nasledujúci tvar sústavy, pričom použijem matice  ${}^{11}\Pi_k(T_1)$  a  ${}^{01}\Pi_k(T_l)$ . Potom

$${}^j_0\mathbf{p}_k(t_2)^\top = {}^j_0\mathbf{p}_0(t_1)^\top {}^{11}\Pi_k(T_1) + \sum_{l=1}^{k+1} {}^j_0\mathbf{p}_l(t_1)^\top {}^{01}\Pi_{k+1-l}(T_l). \quad (9.3)$$

Ďalej sa zaoberám odvođením pravdepodobnostných matíc  ${}^{11}\Pi_k(T_1)$  a  ${}^{01}\Pi_k(T_l)$ . Podľa kapitoly 4 viem, že fakt, že  $T_l$  je deterministicky rovná  $\tau_l$ , môžem chápať, ako keby  $T_j$  bola náhodná premenná s rozdelením pravdepodobností  $G_l(\cdot) \sim \delta(t - \tau_l)$ . Ďalej uvažujem nejaké pravdepodobnosti príchodu  $k$  zákazníkov za nejakú dobu s nejakou začiatočnou podmienkou pre zdroj a rovnako pre koncovú podmienku pre zdroj. Týmito pravdepodobnosťami som sa zaoberal v kapitole 7 a označoval som ich  ${}^j_0\mathbf{v}_k^i(t)$ . Ďalej som odvodil tvar pre matice  ${}^{11}\mathbf{v}_k(t)$  a  ${}^{01}\mathbf{v}_k(t)$ , čo je zachytené v rovniciach (7.27) a (7.29). Všímvavý čitateľ určite vidí analógiu medzi týmito pravdepodobnostnými maticami z kapitoly 7 a týmito z tejto kapitoly. Použijúc predchádzajúce výsledky najskôr pre maticu  ${}^{01}\Pi_k(T_l)$ , dostávam z vety o úplnej pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} {}^{01}\Pi_k(T_l) &= \int_0^\infty {}^{01}\mathbf{v}_k(t) g_l(t) dt = \int_0^\infty \frac{(\int_0^t e^{-\Phi s} \mathbf{\Lambda} e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi t} \delta(t - \tau_l) dt = \\ &= \frac{(\int_0^{\tau_l} e^{-\Phi s} \mathbf{\Lambda} e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi \tau_l}, \end{aligned} \quad (9.4)$$

čo možno chápať ako strednú hodnotu náhodnej premennej  ${}^{01}\mathbf{v}_k(T_l)$ , teda ako  ${}^{01}\Pi_k(T_l) = E({}^{01}\mathbf{v}_k(T_l))$ .

Keď využijem vlastnosť matice  ${}^{11}\Pi_k(T_1)$  z rovnice (7.28), dostávam

$$\begin{aligned} {}^{11}\Pi_k(T_1) &= E({}^{11}\mathbf{v}_k(T_1)) = E((\mathbf{0}, \mathbf{1}) {}^{01}\mathbf{v}_k(T_1)) = \\ &= (\mathbf{0}, \mathbf{1}) E({}^{01}\mathbf{v}_k(T_1)) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \frac{(\int_0^{\tau_1} e^{-\Phi s} \mathbf{\Lambda} e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi \tau_1}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Nakoniec dostávam model

$${}^j_0\mathbf{p}_k(t_2)^T = {}^j_0\mathbf{p}_0(t_1)^T {}^{11}\Pi_k(T_1) + \sum_{l=1}^{k+1} {}^j_0\mathbf{p}_l(t_1)^T {}^{01}\Pi_{k+1-l}(T_l), \quad (9.6)$$

$${}^{11}\Pi_k(T_1) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \frac{(\int_0^{\tau_1} e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi \tau_1}, \quad (9.7)$$

$${}^{01}\Pi_k(T_l) = \frac{(\int_0^{\tau_l} e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi \tau_l}, \quad (9.8)$$

plus začiatkové podmienky, ktoré, ako som už skôr spomínal, nie sú podstatné.

### 9.3 Stacionárny model

Predpokladám, že časom sa systém ustáli. Potom má zmysel uvažovať o tvaroch stacionárnych pravdepodobností stavov systému.

Pre  $t \rightarrow \infty$  dostávam

$$\mathbf{p}_k^T = \mathbf{p}_0^T {}^{11}\Pi_k(T_1) + \sum_{l=1}^{k+1} \mathbf{p}_l^T {}^{01}\Pi_{k+1-l}(T_l), \quad (9.9)$$

$${}^{11}\Pi_k(T_1) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \frac{(\int_0^{\tau_1} e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi \tau_1}, \quad (9.10)$$

$${}^{01}\Pi_k(T_l) = \frac{(\int_0^{\tau_l} e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi \tau_l}, \quad (9.11)$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^1 p_k^i. \quad (9.12)$$

Rovnica (9.12) vyplýva z vety o úplnej pravdepodobnosti.

### 9.4 Numerické aspekty výpočtu

Kvôli zložitosti nemá zmysel počítať vytvárajúcu funkciu, pretože ako je to ukázané v časti 5.3, už pri jednoduchšom modeli nebolo možné vyjadriť vytvárajúcu

funkciu explicitne, tým menej to pôjde spraviť tu. Počítať budem rekurentne, analogicky ako v časti 4.3.2

```

 $\epsilon := 0.00001$  %malé číslo;
 $\mathbf{p} := (1, 0, 0, 0, \dots)^T$ ;
repeat
     $\mathbf{p}^* := \mathbf{p}$ ;
     $\mathbf{p} := (\mathbf{p}^{*T} * \Pi)^T$ ;
until  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}^*\| < \epsilon$ ;

```

Treba mať na pamäti, že namiesto nekonečnodimenzionálnej stochastickej matice  $\Pi$  treba použiť jej konečnodimenzionálnu aproximáciu a upraviť jej posledný maticový riadok tak, aby bola stochastická po stĺpcoch. Ak existuje stacionárny systém, tak postupnosť iterácií počítaných takýmto rekurentným spôsobom konverguje. Dôkaz je triviálny. Stačí, ak si uvedomím, že takáto rekurencia priamo simuluje proces v časoch odchodov zákazníkov zo systému a pretože sa systém časom ustáli, musí skonvergovať aj vyššie-spomenutá postupnosť iterácií.

## 9.5 Model $\text{MMPP}|\mathbf{D}|1|\infty$ s konštantnou dobou obsluhy

Táto časť je len špeciálnym prípadom modelu  $\text{MMPP}|\mathbf{D}_k|1|\infty$  a to, ak doba obsluhy nezávisí od počtu zákazníkov v systéme, ale je konštantná. Potom model  $\text{MMPP}|\mathbf{D}_k|1|\infty$  prejde na model  $\text{MMPP}|\mathbf{D}|1|\infty$ . V rovniciach sa tento fakt konštantnej obsluhy prejaví jednoducho tak, že  $T_l = T, \forall l \in \mathbf{N}$ . Mohol som postupovať opačne, teda najskôr odvodiť model  $\text{MMPP}|\mathbf{D}|1|\infty$  a potom prejsť k zložitejšiemu prípadu. Postup, ktorý som zvolil ja, má výhodu v tom, že výsledok, ktorý tu ukážem na pár riadkoch, je dôsledkom predošlého modelu, pričom čitateľa nenudím celou kapitolou.



Ak teda v rovniciach (9.9), (9.10), (9.11) zamením  $T_l$  za  $T$ , ktoré je deterministicky rovné  $\tau$ , tak

$$\mathbf{p}_k^T = \mathbf{p}_0^T {}^{11}\Pi_k(T) + \sum_{l=1}^{k+1} \mathbf{p}_l^T {}^{01}\Pi_{k+1-l}(T), \quad (9.13)$$

$${}^{11}\Pi_k(T) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \frac{(\int_0^\tau e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi \tau}, \quad (9.14)$$

$${}^{01}\Pi_k(T) = \frac{(\int_0^\tau e^{-\Phi s} \Lambda e^{\Phi s} ds)^k}{k!} e^{-\Phi \tau}, \quad (9.15)$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^1 p_k^i. \quad (9.16)$$

Numerický výpočet bude analogický s postupom v časti 9.4.

# Kapitola 10

## Simulačné výsledky versus analytické

### 10.1 Umelá konverzácia

Signál opísaný v tejto kapitole reprodukuje ON/OFF časové charakteristiky ľudskej hovorovej reči pre charakterizovanie systémov reči, ktoré majú rečové detektory, ako reproduktorové telefóny, zariadenia s echo kontrolou, packetové systémy a systémy ATM (Asynchronous Transfer Mode). Tento signál odráža parametre ľudskej konverzácie, ako je dĺžka hovorenia, pauzy, dvojitého hovoru a vzájomného ticha pri telefonovaní dvoch jedincov. Nasledujúca sekcia popíše tieto charakteristiky.

### 10.2 Charakteristiky ľudskej hovorovej reči

Nasledujúce fakty sú prebraté z [13]. Dĺžky trvania a pomery doby hovorenia a pauzy sa menia v závislosti na podmienkach merania. Nasledujúca časť špecifikuje hodnotu pre každý parameter v hovorovej reči nezapočítavajúc zdvíhanie a zavesovanie telefónu.

## Charakteristiky namerané bez času zdvíhania telefónu

### 1. Charakteristiky doby hovorenia

Funkcia hustoty pravdepodobnosti pre dobu hovorenia je modelovaná ako lineárna kombinácia dvoch geometrických hustôt pravdepodobností

$$\begin{aligned}f_1(k) &= C_1(1 - U_1)U_1^{k-1} + C_2(1 - U_2)U_2^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{kde} \\C_1 &= 0.60278, \\C_2 &= 0.39817, \\U_1 &= 0.92446, \\U_2 &= 0.98916.\end{aligned}\tag{10.1}$$

Každé zvýšenie premennej  $k$  zodpovedá nárastu o 5 ms. Priemerná doba hovorenia je 227 ms.

### 2. Charakteristiky páуз

Hustota pravdepodobnosti trvania pauzy je taktiež modelovaná ako lineárna kombinácia dvoch geometrických hustôt pravdepodobností

$$\begin{aligned}f_p(k) &= D_1(1 - W_1)W_1^{k-1} + D_2(1 - W_2)W_2^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{kde} \\D_1 &= 0.76693, \\D_2 &= 0.23307, \\W_1 &= 0.89700, \\W_2 &= 0.99791.\end{aligned}\tag{10.2}$$

Priemerná doba pauzy je 596 ms.

## 10.3 Aproximácia diskretných geometrických rozdelení spojitými exponenciálnymi rozdeleniami

Kvôli lepšej manipulácii nahrádzam diskkrétne geometrické rozdelenia spojitými exponenciálnymi tak, aby sa zdodovali stredné hodnoty oboch rozdelení. Každé jedno geometrické rozdelenie je teda nahradené exponenciálnym a výsledok potom je lineárna kombinácia dvoch exponenciálnych rozdelení. Tvar distribučných funkcií potom

je

$$F_1(t) = C_1 \frac{5}{(1-U_1)} e^{-\frac{5t}{1-U_1}} + C_2 \frac{5}{(1-U_2)} e^{-\frac{5t}{1-U_2}}, \quad (10.3)$$

$$F_p(t) = D_1 \frac{5}{(1-W_1)} e^{-\frac{5t}{1-W_1}} + D_2 \frac{5}{(1-W_2)} e^{-\frac{5t}{1-W_2}}. \quad (10.4)$$

Metódou inverzných distribúcií vytváram generátor so želaným rozdelením pre ON, resp. OFF periódu. Tieto generátory využívam v simulácii. Podrobnosti sú ďalej.

## 10.4 Príklad

Na generovanie príchodov zákazníkov som v modeloch použil ON/OFF zdroj. Teraz sa pokúsim ukázať, že takéto zjednodušenie reality bolo opodstatnené a do akej miery prípustné. Na overenie opodstatnenosti volím model MMPP $|D|1|_\infty$  s konštantnou dobou obsluhy, ktorého charakteristiky (pravdepodobnosti stavov) počítam raz numericky a druhý raz simuláciou s použitím rozdelení pre ON, resp. OFF periód podľa predošlej časti.

Vstupné data pre simuláciu sú

1. rozdelenie ON a OFF periód sa riadi v súlade s časťou 10.3,
2. tok zákazníkov pri ON perióde je Poissonov s intenzitou  $\lambda = 0.05 \text{ (ms)}^{-1}$ ,
3. doba obsluhy sa menila od 5, cez 10, 15, 20, do 25 ms.

Vstupné data pre model sú

1. rozdelenie ON a OFF periód sa riadi exponenciálnym rozdelením s intenzitami  $\gamma^{01} = 0.0017$ ,  $\gamma^{10} = 0.0044$ ,
2. tok zákazníkov pri ON perióde je Poissonov s intenzitou  $\lambda = 0.05 \text{ (ms)}^{-1}$ ,
3. doba obsluhy sa menila od 5, cez 10, 15, 20, do 25 ms.

## 10.5 Výsledky a porovnanie

### Postup pri simulácii

GD1.m (najvyšší program), G.m, G01.m, G10.m (generátory), fl.m, fp.m (sú využívané generátormi), vsun.m (pomocný súbor).

### Postup pri numerickom výpočte

Program na výpočet a grafickú reprezentáciu pravdepodobností stavov je vytvorený v programe Matlab s numerickými výsledkami z programu Maple. Súbor exp.tex, vytvorený pod programom Maple, obsahuje výpočet exponenciál matíc potrebných pri výpočte. Na výpočet sú použité súbory mmppda.m (najvyšší program), Pi01.m, Pi11.m (matice  ${}^{01}\Pi_k(t)$  a  ${}^{11}\Pi_k(t)$ ), ii.m (pomocný súbor).

```
> with(linalg);
```

```
> l:=0.05; L:=matrix(2,2,[0,0,0,1]);
```

```
l := .05
```

$$L := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & .05 \end{bmatrix}$$

```
> g01:=0.0017; g10:=0.0044; G:=linalg[matrix](2,2,[-g01,g01,g10,-g10]);
```

```
g01 := .0017
```

```
g10 := .0044
```

$$G := \begin{bmatrix} -.0017 & .0017 \\ .0044 & -.0044 \end{bmatrix}$$

```
> F:=-G+L;
```

```
F := -G + L
```

```
> evalm(F);
```

$$\begin{bmatrix} .0017 & -.0017 \\ -.0044 & .0544 \end{bmatrix}$$

---

> expand(evalm(exponential(-F,s)\&\*L\&\*exponential(F,s))[1,1]);

$$\begin{aligned} &-.0001332283656 e^{(.05454155526 s)} e^{(-.00155844474 s)} \\ &+.0001332283656 e^{(.00155844474 s)} e^{(-.00155844474 s)} \\ &+.0001332283656 e^{(.05454155526 s)} e^{(-.05454155526 s)} \\ &-.0001332283656 e^{(.00155844474 s)} e^{(-.05454155526 s)} \end{aligned}$$

---

> expand(evalm(exponential(-F,s)\&\*L\&\*exponential(F,s))[1,2]);

$$\begin{aligned} &.4286175941 10^{-5} e^{(.00155844474 s)} e^{(-.00155844474 s)} \\ &+.001599998646 e^{(.05454155526 s)} e^{(-.00155844474 s)} \\ &-.4286175941 10^{-5} e^{(.00155844474 s)} e^{(-.05454155526 s)} \\ &-.001599998646 e^{(.05454155526 s)} e^{(-.05454155526 s)} \end{aligned}$$

---

> expand(evalm(exponential(-F,s)\&\*L\&\*exponential(F,s))[2,1]);

$$\begin{aligned} &-.004141172964 e^{(.05454155526 s)} e^{(-.05454155526 s)} \\ &+.004141172964 e^{(.00155844474 s)} e^{(-.05454155526 s)} \\ &-.00001109363290 e^{(.05454155526 s)} e^{(-.00155844474 s)} \\ &+.00001109363290 e^{(.00155844474 s)} e^{(-.00155844474 s)} \end{aligned}$$

---

> expand(evalm(exponential(-F,s)\&\*L\&\*exponential(F,s))[2,2]);

$$\begin{aligned} &.0001332283546 e^{(.00155844474 s)} e^{(-.05454155526 s)} \\ &+.3569004410 10^{-6} e^{(.00155844474 s)} e^{(-.00155844474 s)} \\ &+.04973318638 e^{(.05454155526 s)} e^{(-.05454155526 s)} \\ &+.0001332283673 e^{(.05454155526 s)} e^{(-.00155844474 s)} \end{aligned}$$

---

> expand(evalm(exponential(-F,s)\&\*L\&\*exponential(F,s)));

$$\begin{aligned} &[-(-.001604284822 \%4 + .001604284822 \%3) \\ &(-.08304533195 \%2 + .08304533195 \%1), \end{aligned}$$

```

(-.001604284822 %4 + .001604284822 %3)
(.9973282946 %1 + .002671705354 %2)]
[-(.000133585255 %3 + .04986641475 %4)
(-.08304533195 %2 + .08304533195 %1),
(.000133585255 %3 + .04986641475 %4)
(.9973282946 %1 + .002671705354 %2)]
%1 := ( e(-.05454155526 s) )
%2 := ( e(-.00155844474 s) )
%3 := ( e(.00155844474 s) )
%4 := ( e(.05454155526 s) )

```

---

```
> expand(evalm(exponential(-F,s)\&*L\&*exponential(F,s)));
```

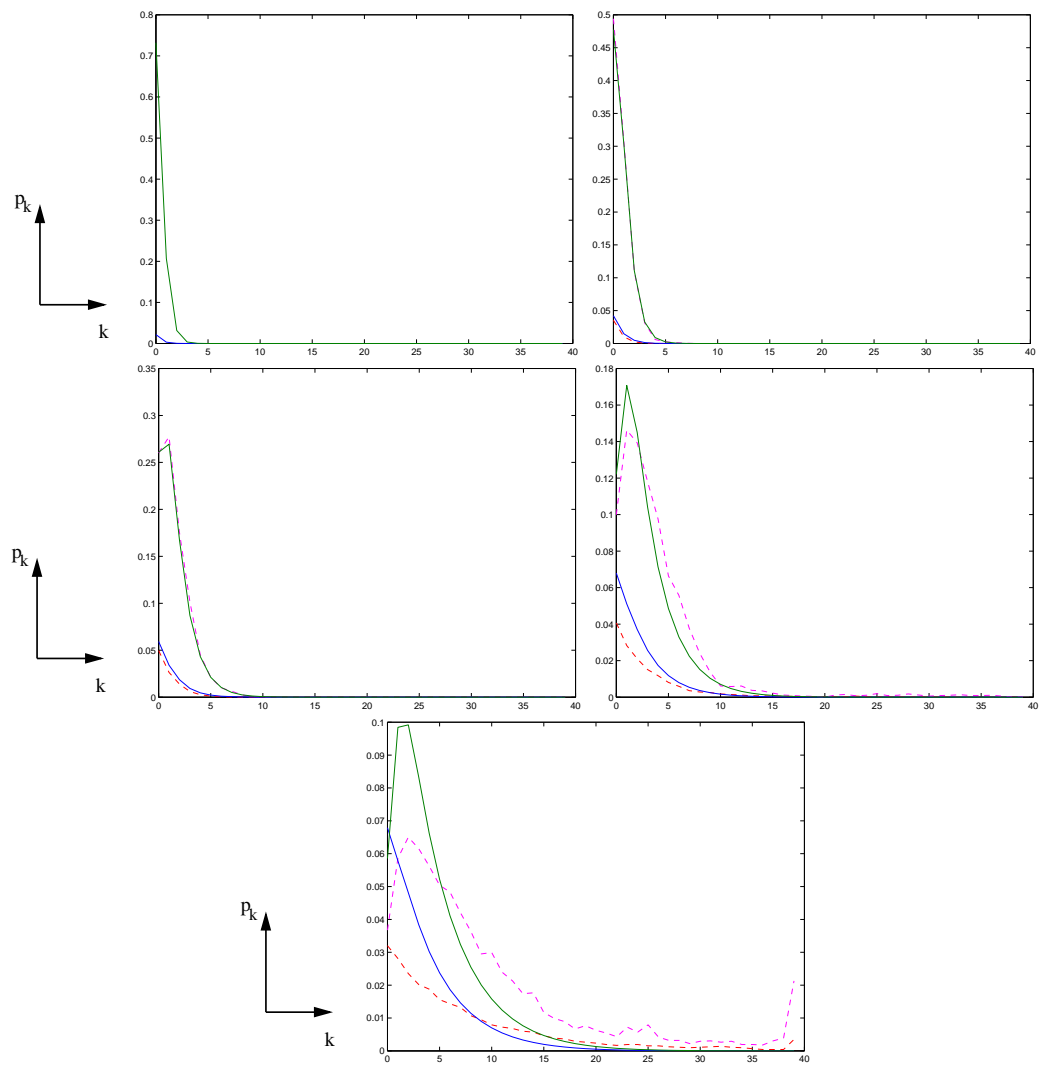
---

Toto sú prvky matice "exponential(F,s)&\*L&\*exponential(-F,s)" , integrovaním cez "s" mám, čo potrebujem.

---

## 10.6 Záver

Z obrázku 10.1 vidím, že pre nízke hodnoty doby obsluhy, až po dobu 20 ms, môžem pripustiť opodstatnenosť aproximácie reálneho toku ON/OFF zdrojom. Len pripomeniem, že stredná doba medzi dvomi príchodmi zákazníkov je rovná 20 ms a teda doba obsluhy musí byť tiež v priemere 20 ms. Pre 20 ms dobu obsluhy sú výsledky overovania opodstatnenosti aproximácie ON/OFF zdrojom prípustné, čo je prijateľný záver.



Obr. 10.1: Graf pravdepodobností pre simuláciu a model riešený numericky pre dobu obsluhy rovnú od 5, cez 10, 15, 20, až 25 ms.



# Apendix

## Simulačné výsledky pre špeciálny model

### $GI|D_k|1|\infty$

Pri tomto modeli volím dobu obsluhy  $T_l$  špeciálnym spôsobom

$$T_l = \begin{cases} 20 + \epsilon & \text{ms } l = 1, 2, \dots, k, \\ 20 - \epsilon & \text{ms } l = k + 1, k + 2, \dots \end{cases} \quad (10.5)$$

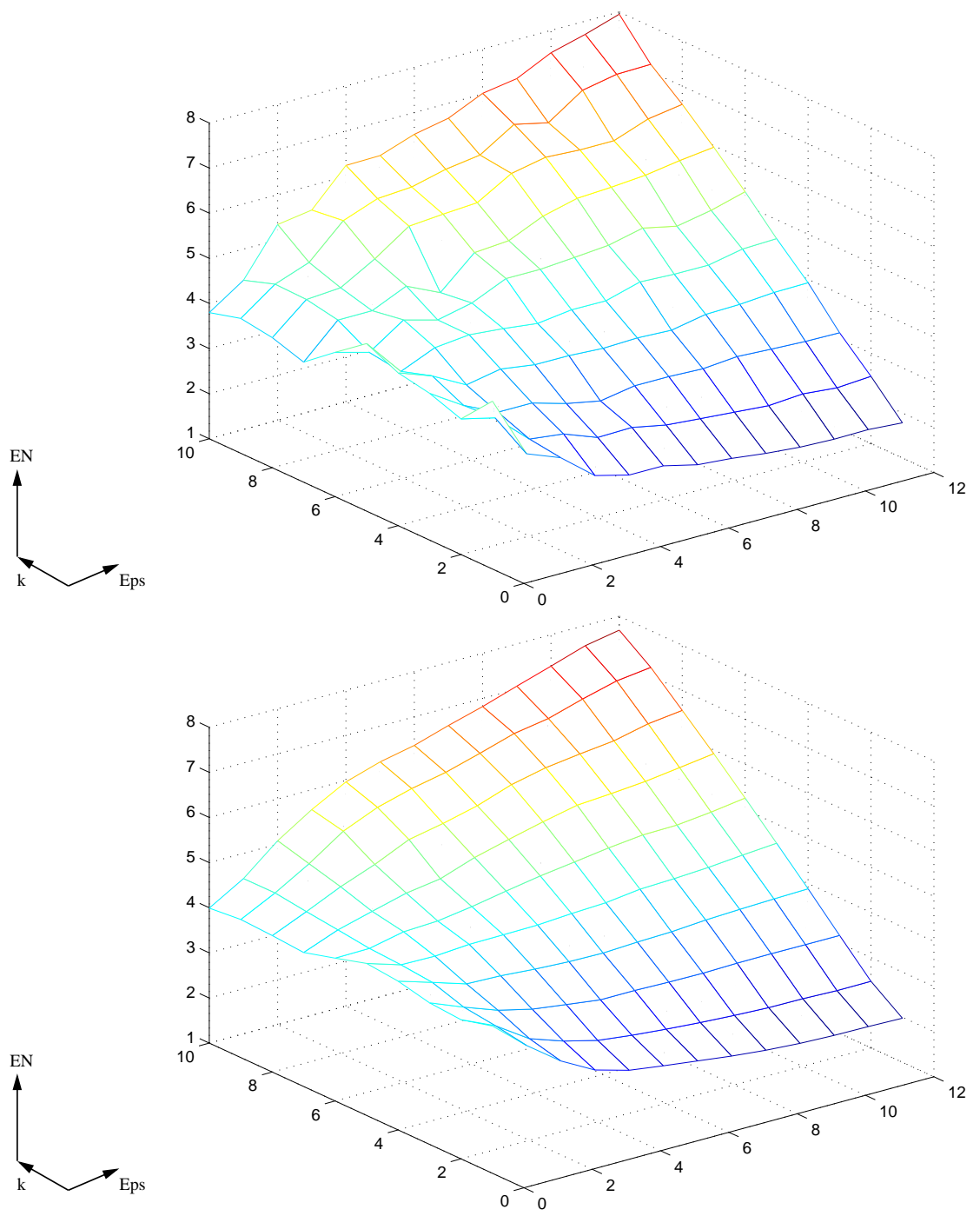
Rozdelenie dĺžok ON a OFF periód sa riadi v súlade s časťou 10.1, 10.2 a 10.3.

Zaujímam sa o charakteristiky, ako sú stredný počet zákazníkov vo fronte  $E(N)$  (počet), stredná doba obsluhy  $E(T)$  (ms), disperzia doby obsluhy  $DT$  ( $(\text{ms})^2$ ) a pravdepodobnosti  $p_0$  prázdneho systému.

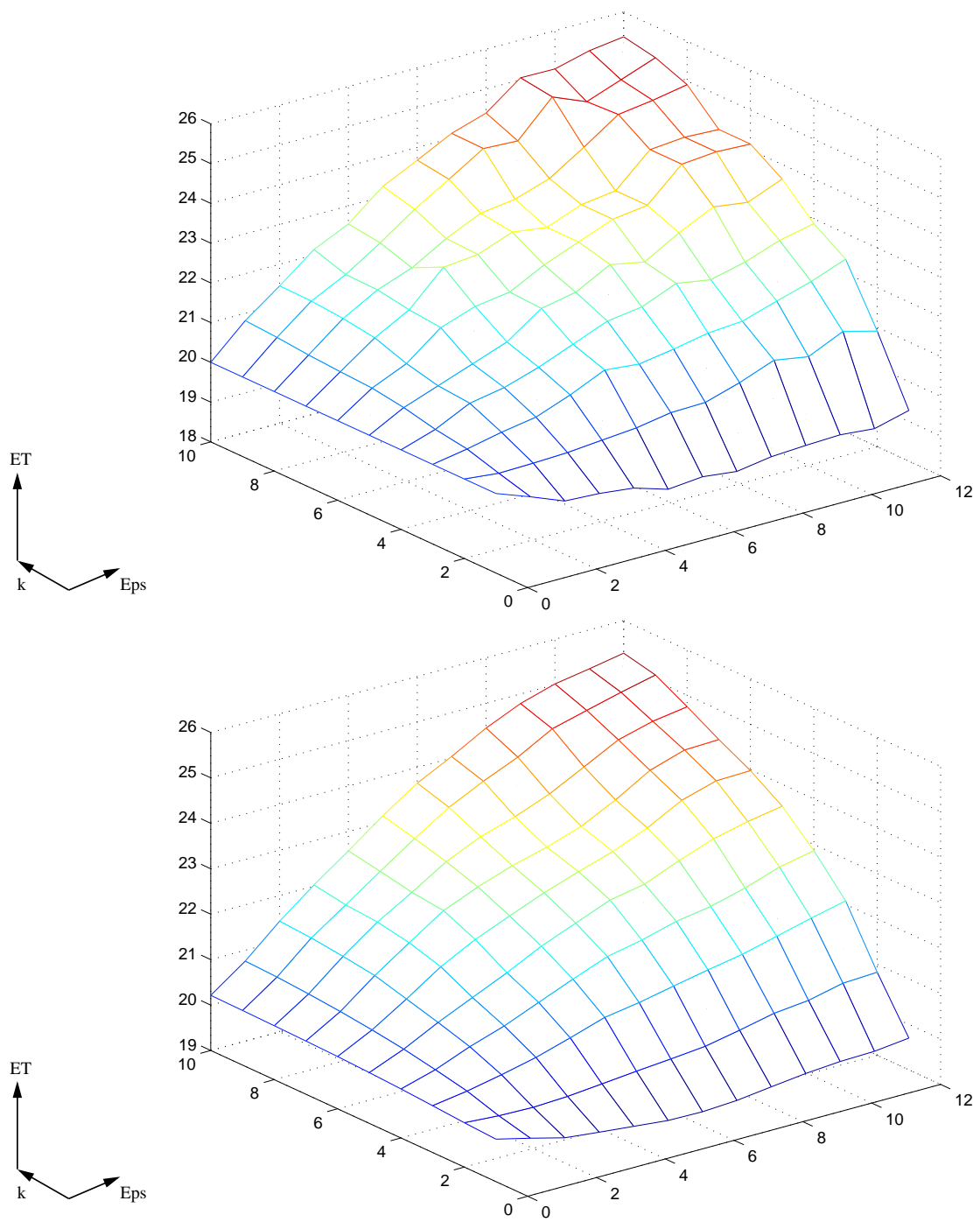
Na realizáciu simulácie som využil program Matlab a v ňom som vytvoril súbory GDk1simgraph.m (najvyšší program), GDk1.m (druhý najvyšší program).

Výsledky simulácie možno vidieť v obr. 10.2, 10.3, 10.4, 10.5 a 10.6. Zobrazené sú vždy dva grafy. Jeden sú skutočne namerané výsledky a pravý graf je graf vyrovnaných, vyhladených výsledkov. Data som vyhladzoval metódou váženého aritmetického priemeru, kde som nejakému bodu matice priradil konvexnú kombináciu toho istého bodu a ôsmich okolostojacich bodov. Body okolo mali váhu každý 0.09 a bod v strede mal váhu  $1 - 8 * 0.09 = 0.28$ .

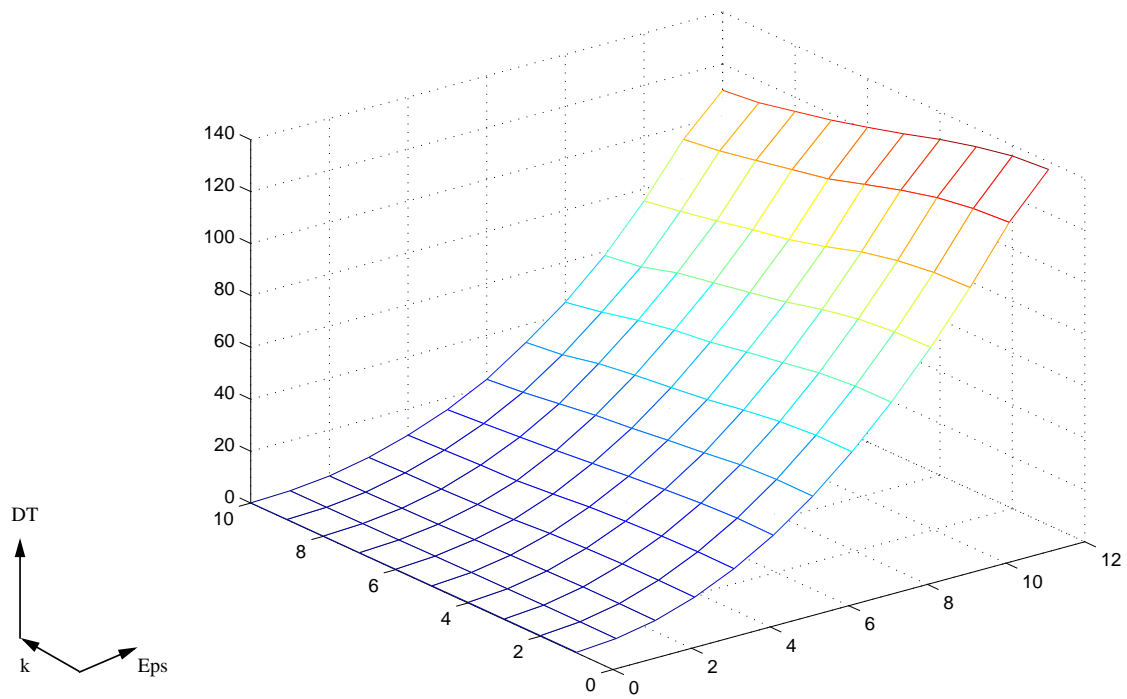
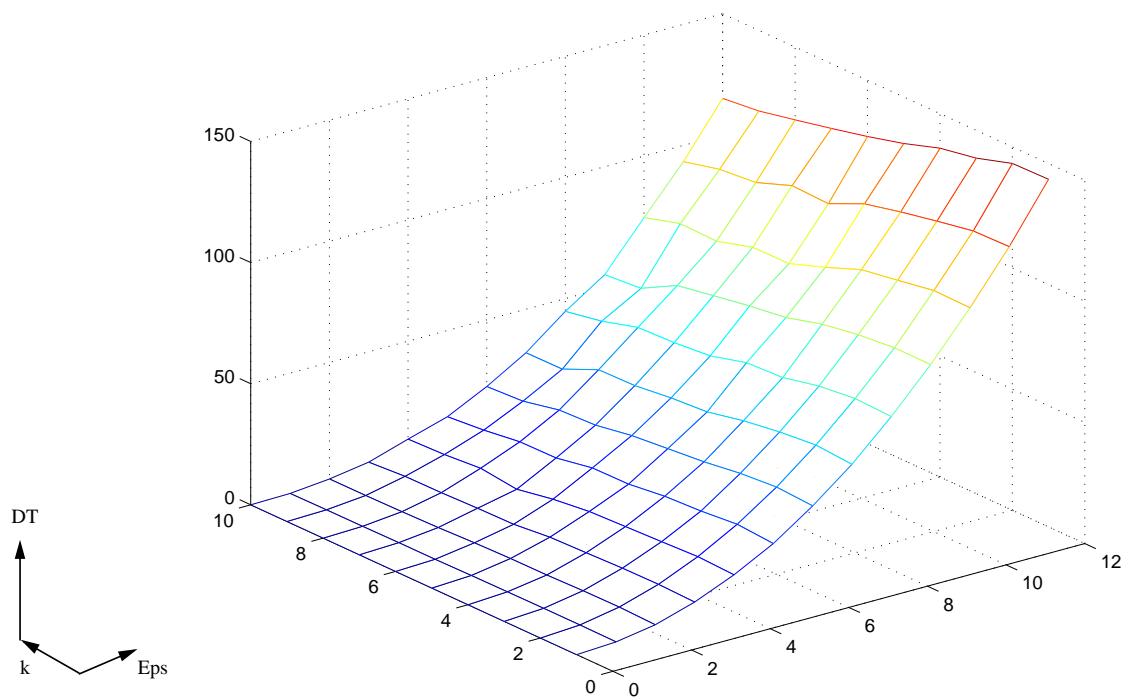
Ďalej nasledujú tabuľky, ktoré sú vlastne prepis dát skutočných výsledkov simulácie a vyhladených výsledkov.



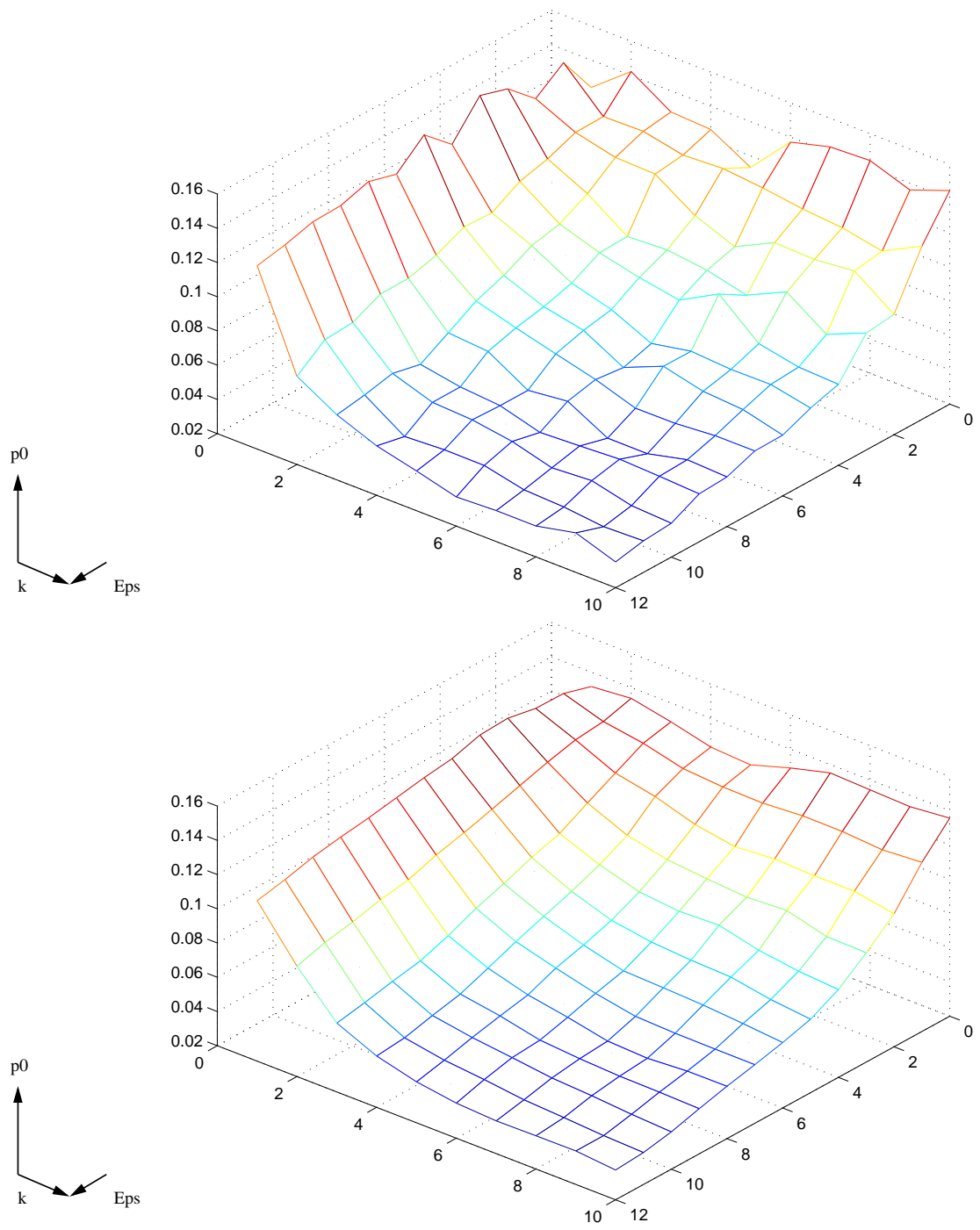
Obr. 10.2: Graf strednej dĺžky frontu v závislosti od  $k$  a  $\epsilon$ .



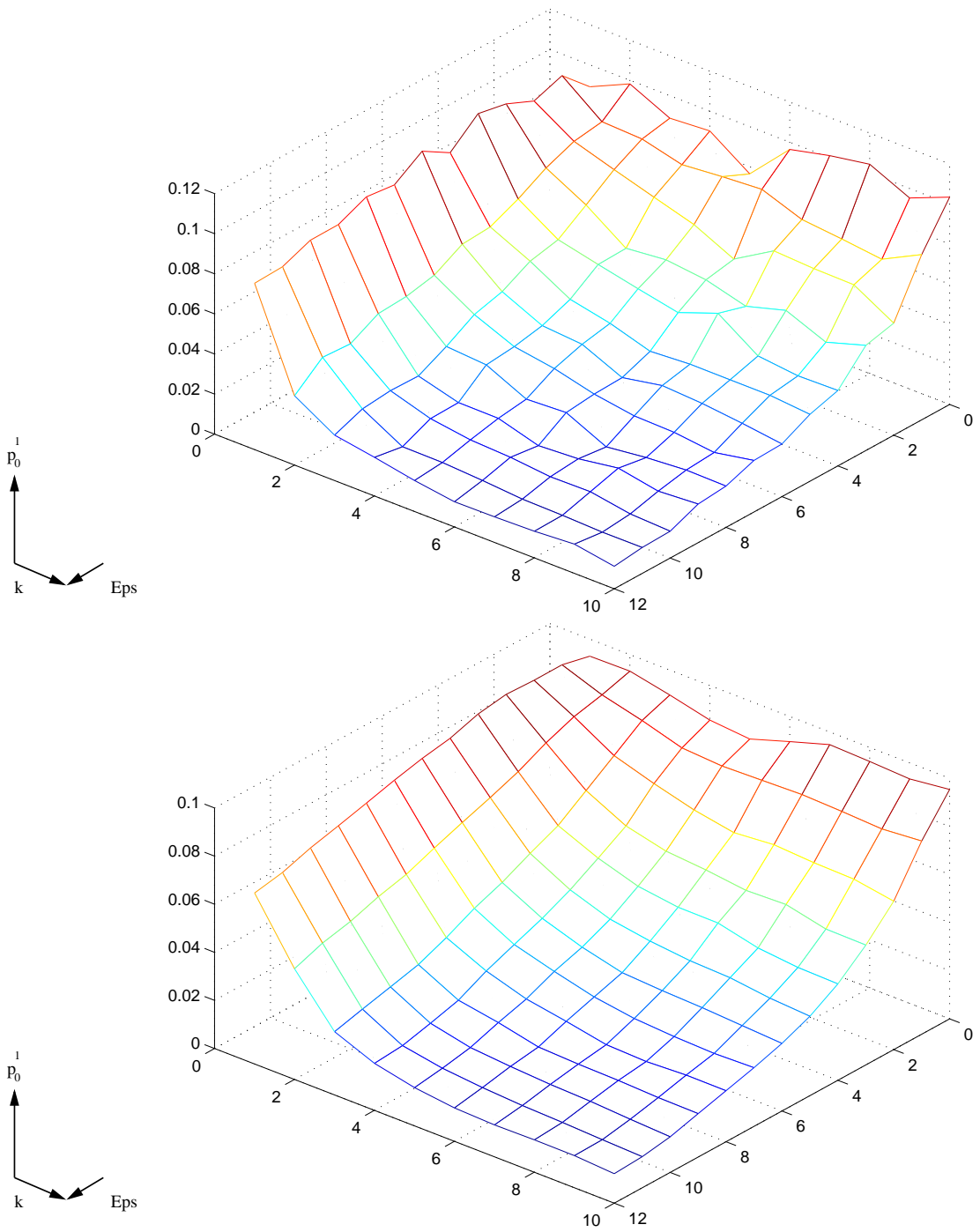
Obr. 10.3: Graf strednej doby obsluhy v závislosti od  $k$  a  $\epsilon$ .



Obr. 10.4: Graf disperzie doby obsluhy v závislosti od  $k$  a  $\epsilon$ .



Obr. 10.5: Graf pravdepodobnosti prázdneho frontu v závislosti od  $k$  a  $\epsilon$ .



Obr. 10.6: Graf pravdepodobnosti prázdneho frontu ak zdroj je ON v závislosti od  $k$  a  $\epsilon$ .

Tabuľka 10.1: Tabuľky stredného počtu zákazníkov vo fronte  $E(N)$ , strednej doby obsluhy  $E(T)$ , disperzie doby obsluhy  $D(T)$  a pravdepodobnosti prázdneho systému  $p_0$  a pre pravdepodobnosti prázdneho systému za predpokladu, že zdroj je ON  $p_0^1$  pre rôzne hodnoty  $k$  a  $\epsilon$  podľa neupravených (nevyhladených) výsledkov simulácie modelu  $\text{MMPP}|D_k|1|\infty$ .

$k \setminus E(N) \setminus \epsilon$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4.72	3.34	3.05	2.45	2.26	2.26	2.08	2.01	1.92	1.85	1.82	1.83	1.78
2	4.00	3.82	3.15	3.05	2.77	2.79	2.64	2.57	2.51	2.45	2.50	2.44	2.48
3	4.25	3.77	3.42	3.42	3.20	3.05	3.18	3.18	3.15	3.22	3.18	3.14	3.13
4	4.38	4.11	3.71	3.85	3.74	3.74	3.70	3.72	3.69	3.83	3.85	3.91	3.92
5	4.71	3.89	4.21	4.29	4.22	4.13	4.23	4.22	4.43	4.40	4.40	4.55	4.57
6	4.19	3.99	4.50	4.30	4.47	4.80	4.80	4.86	4.93	5.10	4.94	5.09	5.29
7	3.66	4.38	4.39	4.73	4.38	5.06	5.12	5.46	5.65	5.69	5.75	5.87	5.96
8	3.88	4.52	4.57	5.01	5.53	5.59	5.64	6.08	6.24	6.20	6.19	6.47	6.59
9	3.98	4.54	4.82	5.54	5.82	5.87	6.06	6.17	6.64	6.48	6.99	7.14	7.16
10	3.79	4.30	5.33	5.45	6.23	6.25	6.51	6.67	7.01	7.13	7.50	7.70	7.94
$k \setminus E(T) \setminus \epsilon$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	20.00	19.68	19.34	19.29	19.19	18.93	19.01	18.91	19.05	19.10	19.13	19.05	19.27
2	20.00	19.90	19.92	19.96	20.03	20.11	20.26	20.28	20.54	20.87	20.73	21.13	20.91
3	20.00	20.15	20.34	20.48	20.81	21.20	21.11	21.25	21.42	21.49	21.76	22.02	22.35
4	20.00	20.28	20.70	20.86	21.13	21.48	21.83	21.95	22.31	22.16	22.37	22.68	22.87
5	20.00	20.46	20.77	21.09	21.40	22.01	22.19	22.65	22.48	22.98	23.40	23.27	23.63
6	20.00	20.58	20.96	21.63	21.93	22.06	22.51	22.85	23.19	23.30	24.10	24.18	24.14
7	20.00	20.63	21.25	21.71	22.55	22.64	22.97	22.85	23.19	23.30	24.10	24.18	24.14
8	20.00	20.68	21.36	21.85	22.17	22.67	23.07	23.19	23.48	24.03	24.62	24.74	24.90
9	20.00	20.75	21.44	21.87	22.43	23.04	23.56	24.10	24.06	24.93	24.58	24.89	25.22
10	20.00	20.81	21.45	22.13	22.54	23.25	23.68	24.11	24.39	25.04	25.03	25.26	25.37
$k \setminus D(T) \setminus \epsilon$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0.89	3.56	8.50	15.35	23.86	35.03	47.82	63.10	80.19	99.24	120.1	143.4
2	0	0.99	3.99	8.99	15.99	24.98	35.93	48.91	63.69	80.23	99.46	119.7	143.1
3	0	0.97	3.88	8.76	15.34	23.55	34.75	47.41	61.96	78.77	96.88	116.9	138.4
4	0	0.92	3.50	8.25	14.70	22.79	32.63	45.18	58.65	76.29	94.33	113.7	135.7
5	0	0.78	3.39	7.80	14.01	20.92	31.20	41.97	57.83	72.10	88.43	110.2	130.8
6	0	0.65	3.06	6.31	12.24	20.74	29.69	40.85	53.80	70.05	83.11	103.4	126.8
7	0	0.60	2.43	6.04	9.45	18.02	27.16	39.07	52.43	67.43	83.00	104.0	123.2
8	0	0.53	2.12	5.55	11.27	17.82	26.52	38.77	51.85	64.69	78.59	98.45	119.9
9	0	0.42	1.92	5.49	10.06	15.72	23.27	32.14	47.49	56.65	78.99	97.02	116.7
10	0	0.33	1.88	4.44	9.53	14.41	22.45	32.03	44.68	55.50	74.62	93.32	115.0
$k \setminus p_0 \setminus \epsilon$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.127	0.147	0.135	0.150	0.155	0.135	0.149	0.135	0.140	0.135	0.134	0.130	0.127
2	0.142	0.124	0.124	0.118	0.113	0.104	0.105	0.097	0.093	0.092	0.085	0.084	0.071
3	0.127	0.125	0.119	0.106	0.098	0.094	0.085	0.079	0.070	0.060	0.064	0.060	0.058
4	0.126	0.120	0.118	0.090	0.090	0.081	0.076	0.073	0.068	0.056	0.056	0.045	0.048
5	0.113	0.121	0.103	0.091	0.084	0.074	0.071	0.066	0.054	0.054	0.055	0.046	0.043
6	0.137	0.119	0.093	0.089	0.080	0.064	0.059	0.060	0.057	0.047	0.051	0.046	0.037
7	0.143	0.116	0.105	0.083	0.093	0.068	0.068	0.053	0.044	0.049	0.045	0.041	0.038
8	0.144	0.114	0.104	0.094	0.073	0.067	0.063	0.053	0.044	0.050	0.046	0.040	0.038
9	0.136	0.109	0.106	0.078	0.068	0.067	0.061	0.055	0.050	0.049	0.041	0.037	0.043
10	0.144	0.121	0.090	0.088	0.067	0.062	0.055	0.055	0.049	0.048	0.039	0.038	0.035
$k \setminus p_0^1 \setminus \epsilon$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	.0891	.1023	.0973	.1035	.1063	.0945	.1029	.0937	.0954	.0893	.0891	.0835	.0830
2	.0982	.0870	.0849	.0793	.0715	.0652	.0642	.0564	.0535	.0526	.0452	.0461	.0346
3	.0888	.0861	.0785	.0685	.0589	.0558	.0483	.0445	.0362	.0292	.0295	.0281	.0227
4	.0902	.0810	.0725	.0546	.0542	.0445	.0390	.0362	.0348	.0236	.0233	.0169	.0193
5	.0765	.0828	.0665	.0566	.0498	.0402	.0374	.0330	.0254	.0235	.0204	.0168	.0155
6	.0964	.0841	.0570	.0543	.0456	.0340	.0285	.0280	.0264	.0176	.0194	.0155	.0126
7	.1010	.0768	.0688	.0488	.0530	.0353	.0323	.0248	.0170	.0187	.0174	.0139	.0128
8	.1044	.0748	.0677	.0545	.0394	.0352	.0311	.0243	.0194	.0218	.0177	.0136	.0133
9	.0953	.0724	.0673	.0463	.0372	.0352	.0289	.0220	.0209	.0180	.0143	.0129	.0146
10	.1034	.0824	.0559	.0525	.0376	.0334	.0263	.0257	.0206	.0193	.0134	.0129	.0112

Tabuľka 10.2: Tabuľky stredného počtu zákazníkov vo fronte  $E(N)$ , strednej doby obsluhy  $E(T)$ , disperzie doby obsluhy  $D(T)$  a pravdepodobnosti prázdneho systému  $p_0$  a pre pravdepodobnosti prázdneho systému za predpokladu, že zdroj je ON  $p_0^1$  pre rôzne hodnoty  $k$  a  $\epsilon$  podľa upravených (vyhladených) výsledkov simulácie modelu  $MMPP|D_k|1|\infty$ .

$k \setminus E(N) \setminus \epsilon$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4.264	3.627	3.079	2.675	2.463	2.358	2.261	2.163	2.088	2.035	2.006	1.998	1.977
2	4.083	3.747	3.256	2.995	2.804	2.715	2.644	2.586	2.540	2.504	2.499	2.474	2.474
3	4.139	3.836	3.562	3.382	3.278	3.178	3.181	3.160	3.153	3.170	3.174	3.171	3.169
4	4.297	4.065	3.828	3.802	3.744	3.702	3.691	3.727	3.751	3.806	3.838	3.865	3.885
5	4.369	4.135	4.120	4.175	4.185	4.194	4.246	4.278	4.374	4.402	4.445	4.515	4.574
6	4.166	4.175	4.341	4.375	4.487	4.626	4.758	4.861	4.967	5.049	5.063	5.148	5.254
7	3.971	4.265	4.473	4.671	4.784	5.051	5.245	5.431	5.595	5.646	5.713	5.813	5.916
8	4.025	4.349	4.698	4.986	5.332	5.483	5.671	5.935	6.103	6.206	6.291	6.464	6.556
9	4.062	4.443	4.887	5.403	5.726	5.936	6.092	6.309	6.542	6.669	6.895	7.092	7.186
10	3.991	4.440	5.074	5.559	5.967	6.208	6.368	6.604	6.818	7.065	7.304	7.550	7.691
$k \setminus E(T) \setminus \epsilon$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	19.93	19.75	19.55	19.47	19.39	19.32	19.30	19.35	19.44	19.53	19.59	19.61	19.69
2	19.97	19.92	19.90	19.93	20.01	20.08	20.14	20.22	20.37	20.53	20.61	20.79	20.82
3	20.03	20.14	20.30	20.47	20.70	20.94	21.06	21.22	21.38	21.51	21.70	21.90	22.07
4	20.08	20.29	20.59	20.84	21.16	21.47	21.76	21.92	22.12	22.24	22.44	22.70	22.86
5	20.11	20.42	20.81	21.15	21.49	21.87	22.17	22.48	22.62	22.93	23.21	23.38	23.52
6	20.15	20.53	21.00	21.51	21.90	22.21	22.52	22.78	23.02	23.33	23.73	23.96	23.98
7	20.17	20.61	21.20	21.71	22.21	22.53	22.80	23.00	23.25	23.63	24.07	24.32	24.34
8	20.18	20.68	21.30	21.85	22.30	22.77	23.11	23.35	23.64	24.03	24.42	24.63	24.74
9	20.20	20.73	21.38	21.91	22.44	22.95	23.44	23.81	24.13	24.55	24.75	24.94	25.12
10	20.21	20.76	21.43	22.02	22.57	23.13	23.65	24.03	24.45	24.78	25.01	25.14	25.28
$k \setminus D(T) \setminus \epsilon$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.251	1.424	4.272	9.164	16.00	24.82	35.75	48.72	63.74	80.79	99.72	120.7	137.0
2	0.258	1.476	4.411	9.307	16.12	24.98	35.83	48.77	63.59	80.36	99.13	119.7	135.8
3	0.260	1.469	4.363	9.174	15.82	24.33	35.05	47.63	62.27	78.89	97.28	117.4	132.9
4	0.241	1.387	4.111	8.739	15.04	23.22	33.24	45.63	59.76	76.17	94.22	113.9	129.3
5	0.212	1.258	3.768	8.080	14.16	21.88	31.66	43.24	57.49	72.61	89.86	109.7	125.1
6	0.184	1.109	3.381	7.029	12.72	20.45	29.91	41.42	54.82	69.84	86.16	105.4	121.2
7	0.161	0.961	2.923	6.415	11.47	18.99	28.44	39.84	53.07	67.26	83.52	102.6	117.5
8	0.140	0.825	2.667	5.950	11.09	17.72	26.50	37.85	50.40	64.59	80.53	99.71	114.5
9	0.115	0.730	2.410	5.750	10.40	16.58	24.50	34.84	47.17	60.54	77.81	96.98	111.4
10	0.098	0.674	2.262	5.271	9.734	15.50	23.07	33.19	44.55	58.49	75.34	95.02	109.8
$k \setminus p_0 \setminus \epsilon$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.131	0.136	0.136	0.139	0.139	0.134	0.131	0.129	0.126	0.124	0.121	0.117	0.113
2	0.133	0.129	0.127	0.123	0.118	0.113	0.108	0.104	0.099	0.096	0.092	0.089	0.084
3	0.129	0.125	0.116	0.108	0.099	0.094	0.088	0.082	0.075	0.069	0.066	0.063	0.060
4	0.123	0.119	0.112	0.098	0.090	0.083	0.077	0.072	0.065	0.059	0.055	0.051	0.050
5	0.121	0.117	0.104	0.093	0.083	0.075	0.070	0.065	0.059	0.055	0.052	0.047	0.043
6	0.129	0.117	0.100	0.091	0.081	0.072	0.064	0.059	0.054	0.050	0.049	0.045	0.040
7	0.135	0.119	0.102	0.089	0.081	0.070	0.063	0.055	0.050	0.048	0.046	0.042	0.039
8	0.134	0.118	0.101	0.090	0.076	0.069	0.062	0.054	0.048	0.047	0.044	0.041	0.039
9	0.133	0.117	0.101	0.084	0.073	0.065	0.060	0.054	0.050	0.047	0.043	0.039	0.039
10	0.135	0.118	0.097	0.083	0.071	0.062	0.058	0.054	0.050	0.046	0.041	0.038	0.037
$k \setminus p_0^1 \setminus \epsilon$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	.0929	.0957	.0957	.0962	.0944	.0907	.0887	.0860	.0829	.0799	.0770	.0732	.0711
2	.0931	.0896	.0870	.0824	.0769	.0725	.0685	.0643	.0597	.0568	.0529	.0503	.0460
3	.0896	.0854	.0772	.0691	.0609	.0557	.0500	.0456	.0399	.0351	.0321	.0293	.0263
4	.0856	.0805	.0720	.0608	.0538	.0470	.0415	.0370	.0324	.0266	.0234	.0205	.0196
5	.0842	.0794	.0675	.0568	.0485	.0412	.0360	.0323	.0272	.0238	.0198	.0176	.0159
6	.0896	.0799	.0644	.0554	.0462	.0385	.0318	.0281	.0243	.0201	.0184	.0159	.0139
7	.0947	.0804	.0659	.0533	.0461	.0368	.0308	.0256	.0210	.0193	.0173	.0149	.0133
8	.0941	.0798	.0648	.0538	.0421	.0362	.0301	.0245	.0205	.0190	.0167	.0143	.0135
9	.0933	.0789	.0644	.0501	.0405	.0341	.0291	.0239	.0213	.0183	.0157	.0136	.0134
10	.0954	.0803	.0617	.0498	.0401	.0330	.0281	.0244	.0212	.0180	.0148	.0130	.0123



# Použité označenie

1. Označenie je jednoznačné v celom texte. To znamená, že ak som niečo označil niečím, tak nič iné už tým označené nie je. Ak by sa predsa len vyskytol prípad, že jedna značka je použitá pre dva rôzne objekty, tak len preto, že ide o analógiu, ktorá sa z kapitoly na kapitolu prenáša. Napr. označenie pravdepodobností, respektíve náhodných procesov.
2. Kolmé písmo (antikvu) používam na označenie jedného konkrétneho matematického objektu. Teda čísla, konštanty  $0, 1, e, \pi, i, f(x), \mathbf{I}$ , ďalej funkcie  $\sin, \cos, \ln$ , operácie a značky  $+, -, \times, (), \infty, d$ , ďalej množiny  $\mathbf{R}, \mathbf{R}_{0+}, \mathbf{N}, \mathbf{N}_0$ , indexy  $_{0,1}, k$  a matice.
3. Kurzívou označujem všetko ostatné. Teda premenné  $x, y$ , bližšie nešpecifikované konštanty.
4. Tučný font používam pre matice, vektory,  $n$ -tice, množiny.
5. Tenký font používam pre všetky ostatné matematické objekty.
6. Príklady. Jednotkový vektor zapisujem  $\mathbf{1}$ , ale  $1$  je číslo. Väčšinou bude jasné, o čo sa kde jedná z kontextu.
7. Veľkými latinskými písmenami označujem množiny a funkcie, veľkými gréckymi písmenami označujem matice a operátory, malými latinskými písmenami označujem funkcie, skaláry, konštanty, vektory, indexy, malými gréckymi písmenami označujem konštanty a funkcie.
8. Indexy sú chápané bežným spôsobom, s tým rozdielom, že tam, kde vystupuje aj ON/OFF zdroj, pravdepodobnosti stavov sú indexované podľa nasledovného

pravidla. Horné indexy popisujú stav zdroja a dolné indexy popisujú stav systému. Ľavé indexy popisujú udalosti buď v čase 0, alebo za dobu 0 a pravé indexy popisujú udalosti v čase  $t$ , alebo za dobu  $t$ .

Niektoré špeciálne značky sú vysvetlené v nasledujúcej tabuľke.

Značka	Význam
$M_k, G_k, D_k$	$k$ zvýrazňuje, že doba obsluhy pre dané rozdelenie pravdepodobnosti je závislá na počte zákazníkov v systéme.
$\mathbf{R}_{0+}$	$\{x   (x \in \mathbf{R}) \wedge (x \geq 0)\}$ .
$\mathbf{N}_0$	$\{x   x \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ .
$P(\cdot), p(\cdot)$	Funkcie pravdepodobnosti.
$o(\Delta t)$	Funkcia s vlastnosťou $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ .
$f \stackrel{\text{def}}{=} g$	"Definujem $f$ , aby bolo $g$ ".
$F_p(x)$	Označenie pre vytvárajúcu funkciu pravdepodobnosti $p$ .
$a := b$	"a-čku priraď b-čko".
$(\cdot)_1, (\cdot)_0$	Indexovanie zodpovedá stavom ON a OFF.
$\mathbf{1}$	Vektor $(1, \dots, 1, 1)^T$ .
$\mathbf{0}$	Nulový vektor, resp. nulová matica podľa kontextu.
$(\mathbf{0}, \mathbf{1})$	Matica, ktorej prvý stĺpec je nulový a druhý samé jednotky.
$\Omega_{k*} \quad (\Omega_{*k})$	$k$ -ty riadok (stĺpec) matice $\Omega$ .
$\times$	Karteziánsky súčin.
$\setminus$	Množinové mínus.
$\square$	Koniec dôkazu.

Tabuľka 10.3: Tabuľka špeciálnych znakov.

# Literatúra

- [1] I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, *Spravočník po matematike*, Moskva 1962.
- [2] V. Keč, P. Teodorecku, *Vvedenie v teoriiju abobščennych funkcij s priloženijami v technike*.
- [3] Jiří Likeš, Josef Machek, *Poččet pravdepodobnosti*, Praha 1981, SNTL.
- [4] Kimon P. Kontovassilis, John T. Tsiligaridis and George I. Stassinopoulos, *Buffer dimensioning for delay- and loss-sensitive traffic*, 1995.
- [5] L. Unčovský, *Stochastické modely operačnej analýzy*, 1980, SNTL.
- [6] Štefan Peško, Juraj Smieško, *Stochastické modely operačnej analýzy*, Žilinská univerzita v Žiline, 1999.
- [7] Josep M. Ferrandiz, *The Relationship between a MMPP and a MMRP*, Hewlett-Packard Company 1992.
- [8] Sang H. Kang, Changhwan Oh, Dan K. Sung, *A traffic Measurement-Based Modeling of Superposed ATM Cell Streams*, Korea Advanced Institute of Science & Technology.
- [9] Pär Karlsson and Ake Arvidsson, *Modelling of traffic with high variability over long time scales with MMPPs*, Department of Telecommunications and Mathematics, University of Karlskrona/Ronneby, s-37179 Karlskrona, Sweden.
- [10] Youngwan Kim and San-qi Li, *Performance Analysis of Data Discarding in ATM Networks*, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Texas at Austin.

- [11] Alain Jean-Marie, Zhen Liu, Philippe Nain, and Don Towsley, *Computational Aspects of the Workload Distribution in the MMPP|GI|1 Queue*, *Fellow, IEEE*, 1998.
- [12] Kyeong Soo Kim, *Student Member, IEEE*, and Byeong Gi Lee, *Senior Member, IEEE*, *Three-Level Traffic Shaper and Its Application to Source Clock Frequency Recovery for VBR Video Services in ATM Networks*, 1994.
- [13] Artificial conversational speech, ITU-T, Recommendation P.59, 1993.