Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

BAKALÁRSKA PRÁCA

2007

Martin Lauko

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

DEA analýza efektívnosti: SBM model

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný odbor:	9.1.9. Aplikovaná matematika
Študijný program:	Ekonomická a finančná matematika
Vedúci práce:	Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

BRATISLAVA 2007 MARTIN LAUKO

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem na svoju česť, že som túto bakalársku prácu na vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry a ďalších zdrojov.

. . . .

Martin Lauko

Poďakovanie

Chcem využiť tento priestor a vysloviť úprimné poďakovanie svojej vedúcej záverečnej práce, doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. za odborné rady a mnohé podnetné pripomienky k práci.

autor

Abstrakt

Bakalárska práca sa zaoberá využitím modelov Data Envelopment Analysis (DEA) *pri meraní efektívnosti útvarov v rámci danej skupiny. Efektívnosť v DEA chápeme ako úspešnosť premeniť minimálne množstvo jednotiek vstupov na získanie maximálneho množstva jednotiek výstupov.*
Práca ponúka úvod do problematiky pre nezainteresovaného čitateľa, stručný prehľad základných i odvodených modelov DEA a podrobnejšie sa venuje jednému z nich - modelu Slacks Based Mesasure (SBM)*. Tento model práca demonštruje v niekoľkých aplikáciách a porovnaniach s inými modelmi.*
Súčasťou práce je uvedenie kombinovaného Slacks Based Measure in Assurance Region (SBM-AR) *modelu ako kombinácie efektívnosti založenej na meraní veľkosti rezerv a modelu s ohraničeniami prípustných váh určenými zadávateľom. Tento model práca využíva pri zhodnotení kvality vysokých škôl.*

Kľúčové slová

analýza efektívnosti, Data Envelopment Analysis (DEA), Slacks Based Measure (SBM) model, SBM Assurance region (SBM-AR) model, hodnotenie kvality vysokých škôl

Obsah

Úvod

Neustále rozširovanie sa sietí vo sfére výroby, služieb, vedeckého výskumu či ďalších prináša so sebou čoraz náročnejšie úlohy vyhľadať a odstrániť prípadné zdroje neefektívneho využívania obmedzených zdrojov. Pritom nemusí ísť vždy len o biznis.

Či už nás zaujíma práca pobočiek veľkej bankovej siete, kvalita poskytovania zdravotnej starostlivosti zmluvnými lekármi, efektívnosť vedeckého výskumu, odôvodnenosť nákladov inštitúcii štátnej správy alebo vhodnosť použitia motorov v najnovších lietadlách; stále riešime jednu základnú úlohu: porovnať jednotky v rámci danej skupiny.

Kľúčovou výzvou ekonomického manažmentu je efektívne využívať zdroje a zabezpečovať efektívnu produkciu - aj v prípade jednotiek nevýrobného charakteru. Zvlášť v nevýrobnej sfére nie je samotný pojem efektívnosť jasne definovaný. Základom preň je detailné porovnávanie útvarov.

Toto porovnanie je základnou úlohou, ktorú rieši *Data Envelopment Analysis* (Analýza obálky dát) - a táto priniesla ideálne riešenia pre obrovské množstvo rozmanitých oblastí ľudského sveta, v ktorých potrebujeme *porovnávať*, vyhľadávať vzorové objekty, objekty najlepšie spĺňajúce očakávania a odhaľovať zdroje a mieru neefektívnosti tých ostatných.

Práve modely DEA sú v súčasnosti jedným z najvhodnejších nástrojov v meraní efektívnosti a preto je dôležité vedieť ich správne použiť.

Jedným z prístupov k meraniu efektívnosti, ktorý sme prezentovali aj v tejto práce, je meranie založené na veľkosti chyby (rezervy) voči efektívnej jednotke, ktorá vznikla kombináciou ostatných jednotiek skupiny.

Cieľom tejto práce je preskúmať tieto rôzne možnosti, bližšie sa zamerať konkrétne na SBM model a v praktických aplikáciách prezentovať použitie týchto modelov.

Nasleduje niekoľko slov o organizácii práce. Prvú kapitolu možno odporučiť čitateľovi, ktorý sa s problematikou analýzy efektívnosti stretáva po prvýkrát. Intuitívnu predstavu o tom, čo je a čo nie je efektívne, tu podporia názorné príklady a postupná formalizácia vedie ku koncepčného modelu.

Druhá kapitola už ponúka detailnejšie a matematicky popisnejšie predstavenie jednotlivých základných modelov (CCR, BCC, aditívny model), ktoré majú nezastúpiteľné miesto v problematike DEA.

V tretej kapitole sa pokúsime bližšie predstaviť SBM model a jeho niekoľké modifikácie, ktoré možno použiť v rôznych situáciách. Záverečná kapitola ukazuje použitie praktickú situáciu, v ktorej DEA modely úspešne aplikujeme - hodnotenie kvality vysokých škôl pomocou údajov z Akademickej ratingovej a rankingovej agentúry (ARRA). V prílohách možno nájsť zdrojový kód programu a podrobné tabuľky s dátami praktického príkladu.

1 Meranie efektívnosti

Prostriedky *Data Envelopment Analysis (ďalej DEA)* umožňujú použitie v rozličných situáciách, keď potrebujeme porovnať objekty (jednotky) v rámci danej skupiny týchto objektov. Hľadáme vzorové objekty, najlepšie, ktoré najlepšie spĺňajú naše očakávania. Pomocou nich potom odhaľujeme príčiny neefektívnosti a snažíme sa ju nejakým spôsobom kvantifikovať.

Najskôr potrebujeme určiť, čo vlastne požiadavka *vzorový, najlepší* objekt znamená. V prípade DEA modelov používame tiež slovo *efektívnosť* - znamená účinnosť použitia prostriedkov z hľadiska výsledkov. Teda efektívny je objekt, ktorý dosahuje najlepšie výsledky pri premene vstupov na výstupy, objekt s najvyššou produktivitou.

Produktivitu môžeme počítať napríklad ako počet vyrobených výrobkov na 1 pracovníka, počet predaných kusov na 1 m^2 predajnej plochy, všeobecne ako pomer

$$\text{produktivita} = \frac{\text{výstup}}{\text{vstup}} \qquad \nearrow \tag{1.1}$$

kde pod *vstupom* rozumieme podľa kontextu pracovnú silu, materiál, kapitál - všeobecne to, čo objekt pri svojej činnosti spotrebúva a predstavuje to preň náklady, preto sa spotrebu vstupov snažíme minimalizovať, zatiaľ čo *výstup* predstavuje zisk, úžitok, kvalitu - všetko, čo sa snažíme maximalizovať. Našim cieľom je preto vysoká produktivita.

Efektivitou, resp. mierou efektivity konkrétnej jednotky potom rozumieme zlomok

$$\text{efektivita jednotky} = \frac{\text{produktivita jednotky}}{\text{maximálna produktivita}} \tag{1.2}$$

Pritom maximálnou produktivitou môžeme rozumieť maximálnu teoreticky a technicky možnú produktivitu danej činnosti. Túto však často nepoznáme alebo nevieme presne určiť, preto ju v DEA nahrádzame jej odhadom - produktivitu jednotky s najväčšou hodnotou tohto ukazovateľa. Z tohto dôvodu DEA meria iba *relatívnu efektivitu*, teda navzájom porovnávame útvary v rámci danej skupiny.

Považujeme za dôležité, že efektivita dosahuje hodnoty z intervalu $(0, 1]$, resp. hodnoty 0% až 100%. Takto definovaná efektívnosť sa dá jednoducho ekonomicky interpretovať ako ”na koľko percent maximálneho výkonu jednotka pracuje”, teda vyjadruje ako veľmi sa príslušná jednotka približuje k maximálnej hodnote produktivity.

Definícia 1.1 *Jednotka je* **efektívna***, ak má efektivitu rovnú 1 (100%). Produktivita takejto jednotky sa rovná relatívne najväčšej produktivite v rámci skupiny. V opačnom prípade je* **neefektívna** *a jej efektivitu nazveme* **mierou neefektívnosti jednotky***.*

V jednoduchom prípade uvažujeme s jedným vstupom a jedným výstupom. Túto situáciu možno interpretovať aj graficky, ako si ukážeme v nasledujúcom príklade.

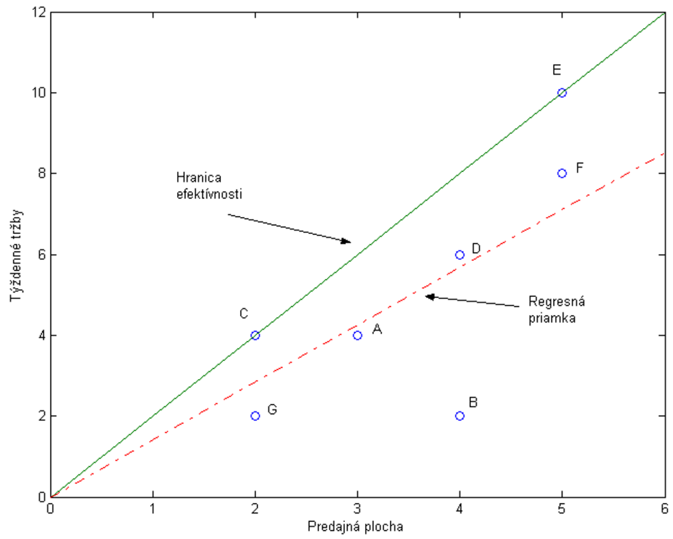
Obchody	Jednotka	A	B	C	D	E	F	G
Predajná plocha	100 m^2	3	4	2	4	5	5	2
Týždenné tržby	1000 $	4	2	4	6	10	8	2
Produktivita	$\frac{1000\,\$}{100\,m^2}$	1,33	0,50	2,00	1,50	2,00	1,60	1,00
Efektivita		0,67	0,25	1,00	0,75	1,00	0,80	0,50
Miera efektivity		67%	25%	100%	75%	100%	80%	50%

Tabuľka 1.1: Sieť predajní - dáta k príkladu 1.2

1.1 Jednoduchý prípad

Príklad 1.2 (Sieť predajní) *Zamerali sme sa na zistenie efektívnosti v sieti predajní značkového oblečenia. Sieť zahŕňa 7 obchodov označených A-G. Vstupom je predajná plochu jednotlivých predajní (jednotkou je 100 m^2) a výstupom sú tržby za 1 týždeň (jednotkou je 1000 $) - údaje sú v tabuľke 1.1. Vypočítame produktivitu a efektivitu jednotlivých obchodov.*

Prvé dva riadky sú údaje, ktoré máme o obchodoch k dispozícii. Produktivitu vypočítame podľa vzťahu (1.1) ako pomer tržieb a predajnej plochy. Najväčšia dosiahnutá produktivita je 2 (jednotky C, E). Predelením produktivity najväčšou hodnotou zistíme efektivitu (viď vzťah (1.2)). Jednotlivé obchody (ich predajnú plochu a tržby) znázorníme aj graficky.



Obr. 1.1: Obrázok k príkladu 1.2

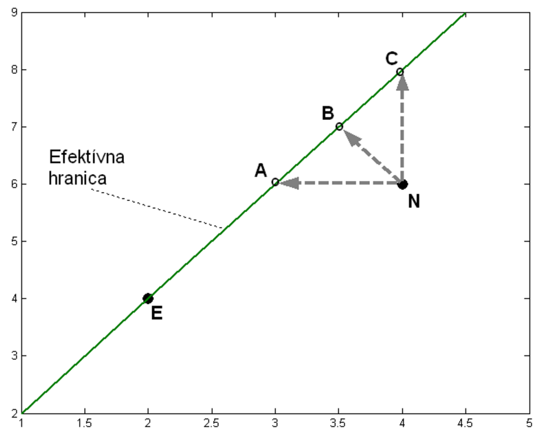
Podľa tabuľky sú v skupine siedmych obchodov sú dva efektívne - obchody C a E. Ak ďalšia jednotka chce byť efektívna, musí dosiahnuť rovnakú produktivitu ako efektívne jednotky. Tým sa dostane na priamku označenú v obrázku ako *hranica efektívnosti*. Touto hranicou rozumieme maximálnu dosiahnutú produktivitu v rámci skupiny, nazývame ju tiež **efektívna množina**. V našom prípade (konštantné výnosy z rozsahu) je to priamka spájajúca efektívnu jednotku s bodom $[0, 0]$.

Môžeme si všimnúť, že kým efektívna množina prechádza "najlepšími" jednotkami (jednotkami s najvyššou produktivitou), regresná priamka (vypočítaná ako priemer závislosti medzi vstupom a výstupom) prechádza približne stredom "oblaku bodov" na obrázku. Kým nad hranicou efektívnosti sa žiadne jednotky nenachádzajú, nad regresnou priamkou ich je približne polovica. Preto DEA modely vyhodnocujú efektivitu podľa pomeru k najlepším (najproduktívnejším) jednotkám v skupine.

Poznámka 1.3 (Jednotková invariantnosť) *Pri výbere efektívnych jednotiek by nemalo záležať na tom, či uvažujeme tržby v $ alebo Sk a plochu v m^2 či km^2. Pritom produktivitu meriame v pomere vstupu a výstupu - v nejakých jednotkách, maximálnu produktivitu uvažujeme v rovnakých jednotkách. Preto je efektivita (ako ich podiel) bezrozmerné číslo a na konkrétnych jednotkách vstupu a výstupu nezáleží. Túto vlastnosť nazývame* **jednotková invariantnosť**.

Často uvažujeme **projekciu na efektívnu množinu** - ako treba upraviť vstupy a výstupy, aby sa jednotky stali efektívne (efektívnejšie). Geometricky si ju môžeme predstaviť ako priemet neefektívneho bodu (jednotky) na bod efektívnej hranice.

Predstavme si efektívnu jednotku E so vstupom 2 a výstupom 4, neefektívnu jednotku N so vstupom 4 a výstupom 6. Aké sú možnosti zefektívnenia jednotky N?



Obr. 1.2: Projekcia na efektívnu množinu

Jednotka môže zachovať výstup 6 a znížiť vstup na 3 (bod A), zachovať vstup 4 a zvýšiť výstup na 8 (bod C) alebo zároveň zvýšiť výstup a znížiť vstup a dostať sa napríklad do bodu B (3,5; 7) alebo iného bodu úsečky AC.

Vo všeobecnosti keď projektujeme jednotku (x, y), chceme zvýšiť jej produktivitu, to znamená znížiť vstupy a/alebo zvýšiť výstupy. Preto pre projekciu $(\hat{x}, \hat{y})$ platí $\hat{x} \leq x, \hat{y} \geq y$.

1.2 Produkčná funkcia a výnosy z rozsahu

V situáciách, ktorými sa zaoberáme, sa nejedná o produkciu (výrobu) v pravom zmysle slova. Napriek tomu má zmysel uvažovať o istých obmedzeniach produkčných možností a maximálnej produktivite. V príklade 1.2 si stačí predstaviť nový obchod X, ktorý by mal predajnú plochu 10 000 m^2 alebo 10 km^2. Aby dosiahol rovnakú produktivitu ako má efektívna jednotka C, musel by týždenne dosahovať tržby na úrovni 200 tisíc \$, resp. 200 mil. \$. Dopyt po oblečení v malom meste je však obmedzený, takže ani takáto enormná predajná plocha ľudí neprinúti nakupovať viac než v menšom obchode. Pre takúto veľkú jednotku je nemožné dosiahnuť rovnakú produktivitu ako "malá" jednotka C.

Tým sa vynára potreba stanoviť, čo *je* a čo *nie je* možné vyrobiť.

Definícia 1.4 (Axiómy produkčnej množiny) *Nech x je vektor vstupov, y vektor výstupov.* **Technológiou** *nazveme dvojicu (x, y), ktorá označuje výstupy y, ktoré je možné vyrobiť spotrebovaním vstupov x za nejakú jednotku času. Potom P* **je produkčná množina** *(množina všetkých technológii, množina produkčných možností), ak sú splnené axiómy:*

A1. *Pozorované technológie (x^j, y^j), pre $j = 1, 2, ..., n$ jednotlivých DMU patria do produkčnej množiny P.*

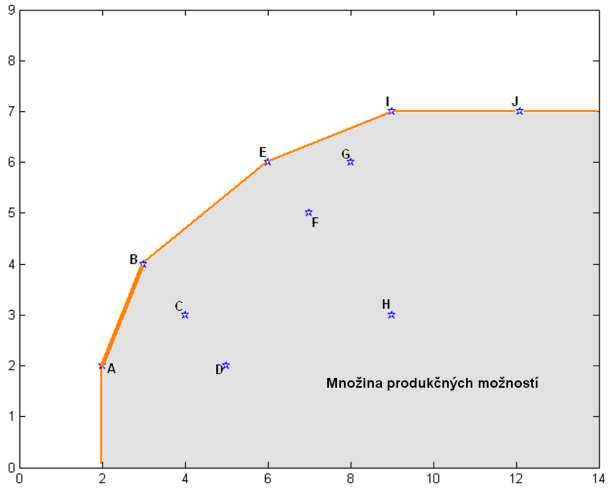
A2. *Ak $(x, y) \in P$, tak $\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} \geq x, \tilde{y} \leq y$ platí $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in P$. Teda ak neznížime vstupy a nezvýšime výstupy, dostaneme realizovateľnú technológiu.*

A3. *P je konvexná, t.j. konvexné kombinácie technológii sú tiež realizovateľnými technológiami.*

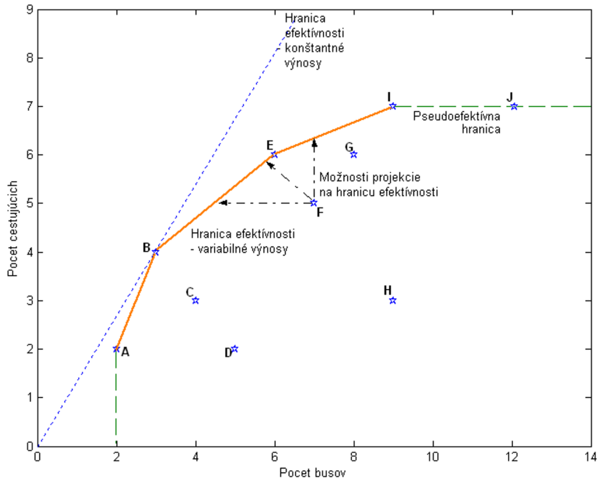
Produkčná množina má **konštantné výnosy z rozsahu***, ak navyše platí:*

A4. *Nezáporný skalárny násobok $(\mathrm{t}x, \mathrm{t}y) \in P$ pre každú technológiu $\forall (x, y) \in P$ a pre ľubovoľné $\mathrm{t} \in \mathbb{R}, \mathrm{t} \geq 0$.*

Opäť v prípade DEA modelov nepoznáme skutočnú produkčnú množinu, preto ju nahrádzame aproximáciou: vytvárame ju pomocou najlepších jednotiek zo skupiny, ktorú porovnávame. Ako ukážka takejto množiny je na obrázku 1.3(a) znázornená produkčná množina s variabilnými výnosmi z rozsahu k príkladu 1.5.



(a) Množina produkčných možností



(b) Jednotky a efektívna hranica

Obr. 1.3: Obrázok k príkladu 1.5

Príklad 1.5 (Autobusová preprava) *Niekoľko alternatívnych autobusových prepravcov (označme ich A-J) pracuje v mestách s rovnakým počtom obyvateľov. Vstupom ich činnosti je určitý počet autobusov, výstupom počet ľudí, ktorých priemerne za deň prepravia (počet meriame v stovkách ľudí). Ich údaje sú v tabuľke 1.2.*

V prípade autobusovej dopravy budeme predpokladať variabilné výnosy z rozsahu. Jednotky znázorníme na grafe 1.3(b) a vyznačíme hranicu efektívnosti pre prípad variabilných výnosov z rozsahu a pre porovnanie aj pre prípad konštantných výnosov. Vidíme, že v prípade jednotky B sa dosahuje efektívnosť pri konštantných aj variabilných výnosoch z rozsahu (táto má globálne najväčšiu produktivitu), pri ďalších jednotkách A, E, I sa dosahuje hranica množiny produkčných možností (tieto majú lokálne najväčšiu produktivitu), t.j. aj tieto ležia na efektívnej množine.

Všimnime si však jednotku J. Táto jednotka sa nachádza na hranici produkčných možností. Je však efektívna? V porovnaní s jednotkou I má rovnaký výstup, avšak má väčší vstup. Výroba jednotky J sa dá dosahovať aj s menšími vstupmi, preto J nemôže byť efektívna.

Autobusy	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Počet autobusov	2	3	4	5	6	7	8	9	9	12
Počet cestujúcich	2	4	3	2	6	5	6	3	7	7
Produktivita	1	1,33	0,75	0,4	1	0,71	0,75	0,33	0,78	0,58
Efektivita (konštantné)	0,75	1,00	0,56	0,30	0,75	0,54	0,56	0,29	0,58	0,38
Efektívna (variabilné)	áno	áno			áno				áno	

Tabuľka 1.2: Sieť predajní - dáta k príkladu 1.5

Túto časť hranice (vyznačená čiarkovaním) nazývame **pseudoefektívna hranica**. Jednotky ležiace na nej nie sú efektívne.

1.3 Vlastnosti dát

Predchádzajúci text pojednával o situácii, keď každá jednotka spracúva jeden vstup a premieňa ho na jeden výstup. Reálna prax zväčša zahŕňa prácu s viacerými údajmi. Pred samotnou analýzou konkrétnej situácie z pohľadu DEA si vyjasníme povahu dát a ich základné vlastnosti, ktoré ďalší text predpokladá.

Prostriedky DEA môžeme použiť v situácii, kde niekoľko jednotiek premieňa vstupy na výstupy a svojim rozhodovaním môže tento proces ovplyvniť. Pritom abstrahujeme od konkrétnej povahy vstupov a výstupov či procesu premeny, zaoberáme sa len číselnými údajmi (hodnotami veličín vstupov a výstupov). Jednotky, s ktorými pracujeme, by mali byť **homogénne** - premieňajú rovnaké druhy vstupov na rovnaké výstupy (avšak nie nutne v rovnakom pomere).

Jednotky, ktoré študujeme, označujeme DMU (z angl. *Decision Making Unit*) ako vyjadrenie ich samostatného rozhodovania o vstupoch a výstupoch. V definícii sa obmedzíme na fakt, že tieto jednotky zodpovedajú za proces premeny vstupov na výstupy - aby sme ponechali priestor na flexibilné aplikácie DEA v širokom spektre oblastí.

V ekonomickom manažmente tieto jednotky môžu predstavovať obchodné domy či pobočky bankovej siete, rovnako ako verejné knižnice, štátne úrady, nemocnice, školy, centrá vedeckého výskumu. Vždy sa jedná o premenu vstupov (pracovná sila, kapitál, prevádzkové podmienky) na výstupy (zisk, kvalita alebo iná forma úžitku).

1.3.1 Výber vstupov a výstupov

Pri analýze efektívnosti tejto skupiny útvarov vyberieme niekoľko spoločných vstupov a výstupov, na základe ktorých budeme efektívnosť merať. Výber údajov robíme tak, aby sme všetky vstupy a výstupy považovali za *významné*, preto ich chceme zohľadniť vo virtuálnom vstupe (výstupe). Odtiaľ pochádza požiadavka na kladné váhy $u_i > 0, v_j > 0$ každého vstupu (výstupu).

Pri voľbe, či je daný údaj vstup alebo výstup, sa pridŕžame princípu, že lepšie sú menšie vstupy a väčšie výstupy - miera efektívnosti odráža tento princíp. Toto pravidlo môže mať aj výnimky: želané vstupy (napr. spracovaný odpad) a nežiadúce výstupy (počet sťažností), u ktorých sa snažíme optimalizovať opačným smerom. S takýmito sa treba vysporiadavať špecificky podľa situácie, najjednoduchšie je želané vstupy zaradiť medzi výstupy a naopak, zložitejšie modely túto situáciu riešia.

Podstatným predpokladom výberu je dostupnosť dát. Hodnoty vstupov a výstupov potrebujeme mať k dispozícii pre všetky jednotky. O týchto hodnotách navyše predpokladáme ich kladnosť (resp. v niektorých prípadoch stačí nezápornosť).

Jednotky veličín, ktorými jednotlivé vstupy a výstupy meriame, nie sú podstatné s výnimkou faktu, že konkrétny vstup (výstup) chceme vo všetkých útvaroch DMU merať rovnakým spôsobom (teda môcť ich navzájom porovnávať).

1.3.2 Označenia dát

Majme teda n útvarov DMU - označujeme ich DMU_1, DMU_2, ... DMU_n. Vyberieme m významných vstupov $1, ..., m$ a s relevantných výstupov $1, ..., s$. Údaje týkajúce sa jednotky DMU_o označíme

$$\begin{aligned} \text{vstupy} \quad x^o &= (x_1^o,\ x_2^o,\ \ldots,\ x_m^o)^T && (1.3) \\ \text{výstupy} \quad y^o &= (y_1^o,\ y_2^o,\ \ldots,\ y_s^o)^T && (1.4) \end{aligned}$$

Pričom x_j^o budeme niekedy písať ako x_{oj}. Samotné x^o (resp. y^o) označí vektor vstupov (výstupov) útvaru DMU_o, teda jeho technológiu môžeme zapísať (x^o, y^o).

Potom celú sadu dát označíme ako maticu vstupov $\mathbf{X} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ a maticu výstupov $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_+^{n \times s}$ nasledovne:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \ldots & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \ldots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 & y_3^1 & \ldots & y_s^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & \ldots & y_s^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^n & y_2^n & y_3^n & \ldots & y_s^n \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Pri splnení predpokladov z tejto časti môžeme problém určenia efektivity analyzovať aj vo viacrozmenrnom prípade.

1.4 Prípad s viacerými vstupmi a výstupmi

Intuitívne najlepšie pochopiteľnú situáciu s jedným vstupom a jedným výstupom, ktorú sme predstavili v predchádzajúcich častiach, chceme rozšíriť pre prípad viacerých vstupov a výstupov ako si ich vyžaduje reálna prax. Jednoduché DEA modely toto riešia prostredníctvom *virtuálnych* vstupov a výstupov.

Virtuálnym vstupom (výstupom) rozumieme funkciu $V(x)$, ktorá vektor niekoľkých vstupov (výstupov) prevedie na jedno číslo. Na tento účel používame váhy v_i pre každý vstup (resp. u_j pre každý výstup). Pre jednoduchosť aplikácie funkciu volíme v tvare **váženého priemeru** - ako lineárnu funkciu

$$V(x) = v^T x = \sum_{i=1}^{m} v_i x_i.$$

Pomocou nej následne definujeme viacrozmernú efektivitu a produktivitu.

Definícia 1.6 *Nech $v \in \mathbb{R}_+^m, u \in \mathbb{R}_+^s$ sú nejaké kladné ohodnotenia (váhy) vstupov a výstupov.* **Produktivitou útvaru** *o (pre $o \in \{1, 2, ..., n\}$) pri daných váhach u, v budeme rozumieť*

$$P^o(u, v) = \frac{u^T y^o}{v^T x^o} = \frac{\sum_{j=1}^{r} u_j y_j^o}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_i^o} \tag{1.6}$$

kde x^o je vektor vstupov a y^o výstupov jednotky o a v, u sú váhy pre konkrétne vstupy a výstupy.

Teda pri konkrétne zvolených ohodnoteniach (napr. cenách faktorov) vieme vypočítať produktivitu útvaru zohľadňujúc všetky významné vstupy a výstupy. Pripomeňme, že práve významnosť požaduje kladné váhy. Efektivitu definujeme analogicky ako vo vzťahu (1.2).

Definícia 1.7 Efektivitou jednotky *o pri daných váhach u, v budeme rozumieť pomer jej produktivity a najväčšej produktivity v skupine pri daných váhach, teda*

$$E^o(u,v) = \frac{P^o(u,v)}{\max\limits_{\forall k} P^k(u,v)} = \frac{\dfrac{u^T y^o}{v^T x^o}}{\max\limits_{\forall k} \dfrac{u^T y^k}{v^T x^k}} \tag{1.7}$$

kde $\forall k$ označuje celú skupinu n útvarov, takže $k \in \{1, 2, .., n\}$.

Z definície triviálne platí $E^o \leq 1$ (efektivita v danej množine nemôže prekročiť maximálnu) a tiež

$$E^o(u,v) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P^o(u,v) = \max_{\forall k} P^k(u,v),$$

teda útvar je efektívny vtedy, ak jeho efektivita je najväčšia v skupine. Rovnako pri kladných váhach a kladných vstupoch je produktivita nezáporná.

Preto je takto definovaná efektivita opäť rozumná (v zmysle ekonomickej interpretácie), keďže jej hodnota sa nachádza v žiadanom intervale $(0, 1]$. Na konkrétnom príklade si ukážeme výpočet produktivity a efektivity.

Príklad 1.8 (Knižnice) *V tomto príklade sa pokúsime hľadať efektivitu 7 knižníc. O týchto máme viac údajov: dva relevantné vstupy (počet zamestnancov a počet knižných titulov) a dva výstupy (počet registrovaných čitateľov a počet výpožičiek). Údaje uvádzame v tabuľke 1.3.*

Knižnice	A	B	C	D	E	F	G
Počet zamestnancov	25	24	31	34	28	47	41
Počet kníh	96	83	102	107	101	162	150
Počet čitateľov	200	300	320	360	188	460	440
Počet výpožičiek	135	75	83	108	99	135	132

Tabuľka 1.3: Knižnice - dáta k príkladu 1.8

Keďže vstupov aj výstupov máme niekoľko, potrebujeme stanoviť dôležitosť jednotlivých ukazovateľov prostredníctvom ich váh: v_1, v_2 pre vstupy a u_1, u_2 pre výstupy. Možností máme niekoľko.

- **jednotkové váhy**: každý vstup a výstup má rovnakú váhu

  vstupy $v_1 = 1,\ v_2 = 1$ **výstupy** $u_1 = 1,\ u_2 = 1$

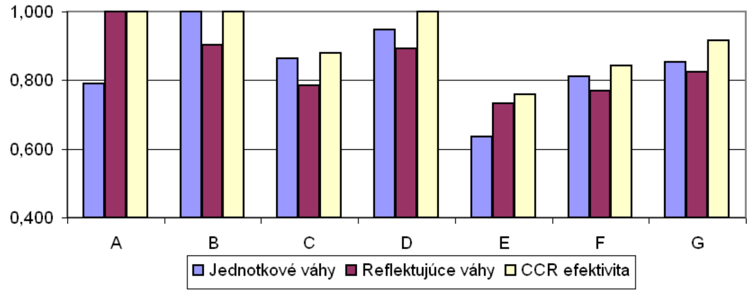
- **váhy reflektujúce dôležitosť**: môžeme si napríklad myslieť, že počet zamestnancov je 2x dôležitejší ako počet kníh a počet výpožičiek je 4x dôležitejší ako počet čitateľov - to odrážajú váhy

  vstupy $v_1 = 2,\ v_2 = 1$ **výstupy** $u_1 = 1,\ u_2 = 4$

V oboch prípadoch sme vypočítali produktivitu ako pomer váženého výstupu a vstupu a efektivitu ako produktivitu predelenú jej najväčšou hodnotou. Okrem toho sme pre porovnanie vypočítali efektívnosť útvarov podľa CCR modelu (o ňom bude reč neskôr). Výsledky zobrazuje tabuľka 1.4 a graf 1.4.

Knižnice		A	B	C	D	E	F	G
Jednotkové	Produktivita	2,769	3,505	3,030	3,319	2,225	2,847	2,995
váhy	Efektivita	0,790	**1**	0,865	0,947	0,635	0,812	0,855
Reflektujúce	Produktivita	5,068	4,580	3,976	4,526	3,720	3,906	4,172
váhy	Efektivita	**1**	0,904	0,784	0,893	0,734	0,771	0,823
CCR model	Efektivita	1	1	0,880	1	0,759	0,843	0,915

Tabuľka 1.4: Knižnice - riešenie príkladu 1.8



Obr. 1.4: Porovnanie efektivít pri rôznych váhach v príklade 1.8

Môžeme si všimnúť, že v prípade prvých váh je efektívna knižnica B, kým v druhom prípade knižnica A. Tento rozpor v jednoduchom prípade môže viesť k pochybnostiam aj v zložitejších situáciách. Zdá sa, že fixné váhy nie sú vhodné na jednoznačné určenie efektívnosti, keďže ani efektívne jednotky nie sú jednoznačne určené.

Rovnako si všimneme, že CCR efektívnosť dosahuje najväčšie hodnoty - to nie je náhoda, ale dôsledok konštrukcie modelu CCR hľadajúceho najvýhodnejšie váhy.

1.4.1 Voľba vhodných váh

Ako ukázal príklad 1.8, takto určená efektívnosť je **optikou zvolených váh**. Teda vyhodnocovateľ si často môže voľbou (pre seba) vhodných váh zabezpečiť, aby bol za efektívny označený práve jeho obľúbený útvar.

Problém určenia efektívnosti sa nám teda zredukoval na **problém voľby vhodných váh**. Aké môžu byť vhodné váhy?

- **jednotkové váhy**: ich nevhodnosť sa ukáže, keď budeme chcieť porovnávať výstupy ako objem vkladov (rádovo v miliónoch korún) a počty účtov (rádovo v tisíckach), teda väčšie číslo bude mať väčší vplyv

- **prevrátená hodnota priemeru**: pre každý vstup vypočítame priemer (medián), t.j. každú hodnotu budeme brať ako jej pomer ku priemeru skupiny, problém budú robiť extrémne veľké hodnoty

- **prevrátená maximálna hodnota**: každú hodnotu budeme brať ako jej pomer k najväčšej hodnote, takto zaniknú rozdiely medzi najmenšími hodnotami

O žiadnej z týchto možností voľby váh (určených konštantne pre všetky jednotky) nemožno jednoznačne vyhlásiť, že sú jediné správne. Preto základný (koncepčný) model vychádza z myšlienky, že každá jednotka si sama určí najvýhodnejšie váhy - pri dodržaní istých pravidiel spoločných pre každú jednotku.

1.4.2 Škálovanie váh

Každá jednotka teda dostane možnosť určiť si vlastné váhy tak, aby jej efektivita definovaná podľa vzťahu (1.7) nadobudla čo najväčšiu hodnotu. V ďalšom budeme teda maximalizovať $E^o(u, v)$ cez všetky $u > 0, v > 0$. Situáciu si zjednodušíme nasledujúcim tvrdením.

Tvrdenie 1.9 *Funkcia* $E^o(u, v)$ *definovaná v (1.7) je homogénna v oboch premenných, t.j.* $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$E^o(u, v) = E^o(c_1u, v) = E^o(u, c_2v) = E^o(c_1u, c_2v) \tag{1.8}$$

D ô k a z. Do vzťahu dosaďme c_1u, resp. c_2v a počítajme:

$$E^o(c_1u, c_2v) = \frac{\dfrac{(c_1u)^T y^o}{(c_2v)^T x^o}}{\max\limits_{\forall k} \dfrac{(c_1u)^T y^k}{(c_2v)^T x^k}} = \frac{\dfrac{c_1}{c_2}\dfrac{u^T y^o}{v^T x^o}}{\dfrac{c_1}{c_2}\max\limits_{\forall k} \dfrac{u^T y^k}{v^T x^k}} = \frac{\dfrac{u^T y^o}{v^T x^o}}{\max\limits_{\forall k} \dfrac{u^T y^k}{v^T x^k}} = E^o(u, v) \tag{1.9}$$

■

To znamená, že pri voľbe váh nezáleží na tom, aké konkrétne váhy zvolíme, pokiaľ zachováme pomer medzi jednotlivými vstupmi (výstupmi). Odstráňme túto nejednoznačnosť pripustením len takých váh, pri ktorých je menovateľ (maximálna produktivita) rovný 1.

Všimnime si, že to je pri každom smere vektora váh možné: nech

$$\max_{\forall k} P^k(u, v) = M, \tag{1.10}$$

potom M je kladné (váhy aj výstupy predpokladáme kladné), t.j. stačí nám zvoliť napríklad váhy (u, Mv), pre ktoré

$$\max_{\forall k} P^k(u, Mv) = \max_{\forall k} \frac{u^T y^k}{(Mv)^T x^k} = \frac{1}{M} \max_{\forall k} P^k(u, v) = 1. \tag{1.11}$$

Teda pre efektivitu platí rovnosť

$$E^o(u, v) = \frac{u^T y^o}{v^T x^o} \qquad \forall o \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{1.12}$$

za podmienky

$$\max_{\forall k} P^k(u, v) = 1. \tag{1.13}$$

Táto podmienka však nie je lineárna, môžeme ju však nahradiť podmienku, ktorú implikuje:

$$P^k(u, v) = \frac{u^T y^k}{v^T x^k} \leq 1 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.14}$$

Podľa (1.12) zapíšeme (1.14) ako

$$E^k(u, v) = \frac{u^T y^k}{v^T x^k} \leq 1 \qquad \forall k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.15}$$

Samotná (1.15) však nestačí, potrebujeme $E^{k_0}(u,v) = 1$ pre nejaké k_0. Realizáciu niektorého ohraničenia ako aktívneho však spoľahlivo zabezpečí bez dotatočnej podmienky maximalizačná úloha koncepčného modelu. Ďalej uvažujeme platnosť (1.12) vo všetkých prípustných váhach.

Vhodné škálovanie váh a rozumnú veľkosť efektivity nám zabezpečí podmienka $E^k \leq 1$ pre $\forall k = 1, 2, ..., n$. Navyše, ak $E^o(u^*, v^*) = 1$ pre nejakú jednotku o a nejaké váhy u^*, v^*, tak pre každú jednotku k platí $E^k(u^*, v^*) \leq 1$, teda jednotka je efektívna práve vtedy, ak žiadna iná nemá pri rovnakých váhach väčšiu efektivitu (produktivitu).

1.5 Koncepčný model

Každá jednotka rieši úlohu nájsť také váhy u a v, aby jej efektívnosť E^o (definovaná ako zlomok virtuálneho výstupu a vstupu) bola čo najvyššia pri dodržaní spoločných podmienok. Podmienkou rozumnej efektivity je $E^k \leq 1$ pre každú jednotku ($\forall k = 1, 2, ..., n$), teda pri daných váhach žiadna jednotka nedosahuje viac než 100% efektívnosť. Druhou podmienokou je kladnosť váh u a v - keďže vyberáme iba relevantné vstupy a výstupy, chceme, aby sa každý z nich podieľal na výslednom zlomku efektivity.

Problém nájdenia váh pri daných obmedzeniach zapíšeme ako úlohu matematického programovania (úloha hľadá optimálne váhy pre jednotku $o \in \{1, 2, ..., n\}$):

$$(\mathrm{MP}_o) \quad \max_{u \in R^m,\, v \in R^r} \quad E^o(u,v) = \frac{u^T y^o}{v^T x^o} \tag{1.16}$$

$$\text{pri ohraničeniach} \quad E^j(u,v) = \frac{u^T y^j}{v^T x^j} \leq 1 \qquad \forall j = 1, 2, ..., n \tag{1.17}$$

$$v > 0 \tag{1.18}$$

$$u > 0 \tag{1.19}$$

Pokiaľ úloha (MP_o) má optimálne riešenie, dostávame dvojicu váh (u^*, v^*) a vieme určiť efektívnosť daného útvaru ako $E^* = E_o(u^*, v^*)$. Ak $E^* = 1$, útvar je efektívny, ináč je neefektívny a E_o vyjadruje mieru jeho efektívnosti.

Môže sa stať, že (MP_o) nemá optimálne riešenie - zapríčiňujú to ostré nerovnosti (1.19) a (1.18) a súvisia s tzv. pseudoefektívnosťou daného útvaru. Vyššie DEA modely sa s týmto problémom vysporiadavajú rôzne, napríklad SBM model bol navrhnutý tak, aby priamo odhľadoval a kvantifikoval aj pseudoefektívnosť ako druh neefektívnosti.

Hlavná myšlienka, ktorá sprevádzala odvodenie tohto koncepčného modelu, tvorí základ celého radu DEA modelov, o ktorých bude reč v ďalšom texte.

2 Modely DEA

V tejto kapitole si predstavíme fungovanie *Data Envelopment Analysis* v niekoľkých základných matematických modeloch. Niektoré ideovo vychádzajú z koncepčného modelu, ďalšie z úvah o tvare produkčnej množiny a jej vlastnostiach.

2.1 Model CCR (Charnes, Cooper, Rhodes)

Predchádzajúce úvahy o koncepčnom modeli naznačili možný spôsob vyhodnocovania efektívnosti. Jeho prvou praktickou realizáciou sa stal v roku 1978 **CCR model**, pomenovaný podľa svojich autorov - A. Charnes, W. W. Cooper and E. Rhodes.

Najdôležitejšou zmenou oproti koncepčnému modelu bolo nahradenie ostrých nerovností (1.19) a (1.18) neostrými, t.j. upravenou podmienkou:

$$u \geq 0, v \geq 0 \tag{2.1}$$

Tým sme rozšírili množinu prípustných riešení (prípustných volieb váh), čo si vyžaduje zvláštnu pozornosť pri interpretovaní výsledkov. Totiž v prípade $u_i = 0$ (resp. $v_j = 0$) pre nejaký vstup (výstup) sa tento nezúčasňuje na výslednom virtuálnom vstupe (výstupe) a zlomku vyjadrujúcom efektívnosť.

Keďže však vo výbere vstupov (výstupov) zohľadňujeme len relevantné, chceme, aby sa každý z nich na zhodnotení efektívnosti útvaru podieľal nenulovou váhou. V tomto modeli to vyžaduje dodatočnú kontrolu nenulovosti váh v optimálnom riešeni (spomenieme neskôr).

Upravenú úlohu (1.17) zlomkového programovania však už môžeme ľahko upraviť na úlohu lineárneho programovania - stačí si všimnúť homogénnosť účelovej funkcie

$$E^o(u, v) = E^o(cu, cv) \quad \forall c \in \mathbb{R}^+, \tag{2.2}$$

túto nejednoznačnosť odstránime dodatočnou podmienkou

$$v^T x^o = 1$$

(normalizáciou vstupov), ktorá navyše umožní vynechať menovateľ z účelovej funkcie. Rovnako ohraničenie (1.17) upravíme na lineárny tvar:

$$\frac{u^T y^j}{v^T x^j} \leq 1 \qquad \forall j = 1, 2, ..., n \tag{2.3}$$

$$u^T y^j - v^T x^j \leq 0 \qquad \forall j = 1, 2, ..., n \tag{2.4}$$

2.1.1 Multiplikatívny CCR model

Tým pádom dostávame výsledný tvar CCR modelu (vstupne orientovaného, pretože fixujeme vstupy) v multiplikatívnej forme ako nasledovnú úlohu lineárneho programovania.

$$
\begin{array}{lll}
\text{(CCR)} \quad \max\limits_{u \in R^m,\, v \in R^r} & u^T y^o & \\
\text{pri ohraničeniach} & v^T x^o = 1 & \\
& u^T y^j - v^T x^j \leq 0 & \forall j = 1, 2, ..., n \\
& u \geq 0 & \\
& v \geq 0 &
\end{array} \tag{2.5}
$$

Definícia 2.1 *Ak existuje optimálne riešenie úlohy (2.5) také, že* $E^o(u^*, v^*) = 1$ *a váhy sú kladné (platí* $u^* > 0, v^* > 0$*), potom je útvar* **CCR efektívny**. *V inom prípade je útvar* **CCR neefektívny**.
Pri kladných váhach $E_o(u^*, v^*)$ *vyjadruje* **mieru CCR efektívnosti útvaru**.

V prípade $u_i^* = 0$ alebo $v_j^* = 0$ pre nejaké i alebo j pre všetky optimálne riešenia, nemožno hovoriť o efektívnosti. Takéto váhy totiž nereflektujú všetky relevantné vstupy a výstupy, ktoré si stanovil vyhodnocovateľ. V takejto situácii niekedy hovoríme o pseudoefektívnosti - tento pojem sa však nedá presne ekonomicky interpretovať. CCR model (na rozdiel od vyšších modelov) nevie tento problém priamo odhaliť, i keď možnosti jeho riešenia existujú - napríklad

- **metóda vnútorného bodu** - pri riešení LP úlohy hľadá optimálne riešenia vnútri množiny prípustných riešení a tieto majú preto minimálny počet nulových zložiek - to je rozdiel oproti často používanej simplexovej metóde, ktorá hľadá bázické riešenia
- **váhy odrazené od nuly** - podmienky (2.1) upravíme na tvar

  $$u_i \geq \varepsilon, v_j \geq \varepsilon \qquad \forall i, j \tag{2.6}$$

  kde $\varepsilon > 0$ je malé číslo (kvôli prípustnosti modelu)
- **využitie duálneho (obálkového) modelu** - v druhej fáze maximalizáciou rezerv overíme, či sa jedná o efektívny útvar

2.2 Obálkový (duálny) CCR model

Keďže sme CCR model zapísali v tvare úlohy lineárneho programovania, naskytá sa otázka, či možno duálnu úlohu k pôvodnému modelu rozumne interpretovať. Odpoveď je pozitívna - takto získame novú, tzv. *obálkovú* formu modelu, ktorý môžeme rovnako použiť na riešenie pôvodného problému zisťovania efektivity.

$$\text{(CCR-D)} \quad \min_{\lambda \in R^n,\, \theta \in R} \quad \theta \tag{2.7}$$

$$\text{pri ohraničeniach} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i \leq \theta x^o \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y^i \geq y^o \tag{2.9}$$

$$\lambda \geq 0$$

Ekonomická interpretácia tohto modelu súvisí s množinou produkčných možností, ako sme ju definovali v (1.4). Prostredníctvom "váh" λ_i n-rozmerného vektora "skladáme" dokopy ideálny útvar ako lineárnu kombináciu iných útvarov (tento fiktívny útvar tiež patrí do produkčnej množiny). Nový útvar, ktorý má mať aspoň taký výstup ako pôvodný útvar, ale vstupy (máme vstupne orientovaný model) sa snažíme čo najviac radiálne zminimalizovať. Pomer jednotlivých vstupov však zachovávame.

Definícia 2.2 *V obálkovom modeli je útvar* **CCR efektívny**, *ak optimálnym riešením úlohy (2.7) je $\theta^* = 1$ a v každom optimálnom riešení sa ohraničenia (2.8), (2.9) realizujú ako aktívne (dosahuje sa rovnosť). V inom prípade je CCR neefektívny.*
Ak sú ohraničenia aktívne, potom θ^* je miera CCR efektívnosti útvaru.

Okrem vstupne orientovaných CCR modelov analogicky definujeme aj výstupne orientované, tie môže čitateľ nájsť v [7, strany 10-11] alebo [4]. Nevýhodou týchto orientovaných modelov je fakt, že zachytávajú len jeden druh neefektívnosti (buď vstupov alebo výstupov).

2.2.1 Rezervy v CCR modeli

Duálny CCR model môžeme mierne modifikovať - pridaním doplnkových premenných prepísať ohraničenia do tvaru rovníc. Doplnkové (vektorové) premenné označíme s^X, s^Y a ekonomicky ich budeme interpretovať ako **rezervy** (z angl. *slacks*), teda nadbytočné vstupy (*input excesses*) a stratená výroba (*output shortfalls*).

$$\begin{array}{lll}
\text{(CCR-D-S)} & \min\limits_{\lambda\in R^n,\ \theta\in R,\ s^X\in R^m,\ s^Y\in R^r} & \theta \\
 & \text{pri ohraničeniach} & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i - s^X = \theta x^o \\
 & & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y^i + s^Y = y^o \\
 & & \lambda \geq 0, s^X \geq 0, s^Y \geq 0
\end{array} \tag{2.10}$$

Útvar, ktorý je CCR efektívny, má rezervy s^X, s^Y nulové *v každom optimálnom riešení.* V snahe hľadať neefektivitu môžeme do účelovej funkcie s malou váhou (násobené ε) pridať aj tieto premenné - tým pádom pseudoefektívny (a teda neefektívny) útvar nebude môcť mať efektivitu 1. Účelová funkcia nadobúda tvar

$$\text{(CCR-D-S')} \quad \min_{\lambda\in R^n,\ \theta\in R,\ s^X\in R^m,\ s^Y\in R^r} \quad \theta - \varepsilon.(\sum_{i=1}^{m} s_i^X + \sum_{i=1}^{s} s_i^Y) \tag{2.11}$$

Môžeme si všimnúť, že táto ε-časť v účelovej funkcii sa v duálnej úlohe (multiplikatívnom modeli) prejaví ako pravá strana ohraničení (2.6), t.j.

$$v \geq \varepsilon e, u \geq \varepsilon e,$$

teda oba spôsoby na vyhľadávanie pseudoefektívnosti sú ekvivalentné. Môžeme si všimnúť, že v prípade priveľkého ε druhá časť preváži θ v účelovej funkcii a tak $s^X \to +\infty$ môže viesť k neohraničenosti obálkového modelu a z toho vyplývajúcej neprípustnosti multiplikatívneho modelu.

Všimnime si, že z komplementarity lineárneho programovania vyplýva ekvivalencia

$$s^X = 0, s^Y = 0 \Leftrightarrow u > 0, v > 0 \tag{2.12}$$

teda nulovosť rezerv môžeme považovať za ekvivalentnú podmienku k požadovanej kladnosti váh v efektívnom útvare.

2.3 BCC model a variabilné výnosy

Problém variabilných výnosov z rozsahu, ako sme ho už načrtli, vyriešili v roku 1984 páni R. Banker, A. Charnes a W.W. Cooper uvedením **BCC modelu**. Základom pre ich úvahy bol model (2.7), ktorý predstavuje v ekonomickom zmysle isté "skladanie" jednotiek, každej jednotke priradí nezápornú váhu. Doplnením podmienky

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \tag{2.13}$$

zabezpečíme, že poskladaná kombinácia jednotiek bude *konvexná*. Takáto kombinácia bude podľa axiómy ($A3$) patriť množine produkčných možností (definovanej v 1.4) aj v prípade, ak výnosy z rozsahu nie sú konštantné.

Ekonomicky si požadovanú konvexnosť môžeme predstaviť ako konvexnosť produkčnej funkcie nasledovne - majme dve jednotky $A\,[x^A, y^A]$ a $B\,[x^B, y^B]$. Nová fiktívna jednotka $Q\,[x^Q, y^Q]$ bude mať údaje

$$\begin{pmatrix} x^Q \\ y^Q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^A \\ y^A \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} x^B \\ y^B \end{pmatrix} \qquad \lambda \in [0,1], \tag{2.14}$$

teda útvar Q λ-časť času pracuje s rovnakým pomerom vstupov/výstupov ako útvar A a zvyšný čas s rovnakým pomerom ako pracuje útvar B. Tým pádom je táto kombinácia vstupov a výstupov tiež realizovateľná bez ohľadu na výnosy z rozsahu a to pre každú konvexnú kombináciu $\forall\lambda \in [0,1]$. To isté platí pre konvexnú kombináciu všetkých n útvarov s váhami λ_i za podmienky (2.13).

V prípade, ak máme o produkčnej funkcii jasnejšiu predstavu, teda vieme, či výnosy z rozsahu sú klesajúce, rastúce, konštantné, môžeme analogicky použiť podmienky:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \begin{cases} \geq 1 & \text{rastúce} \\ = 1 & \text{variabilné} \\ \leq 1 & \text{klesajúce} \\ \text{ľubovoľná} & \text{konštantné} \end{cases} \quad \text{výnosy z rozsahu}$$

Čo sa týka porovnania výslednej miery efektivity, je zrejmé, že BCC model nevracia nižšie hodnoty efektívnosti ako CCR model. (Množinu prípustných riešení sme zmenšili pridaním novej podmienky, optimálna hodnota v minimalizačnej úlohe nemôže byť nižšia.)

Platí, že CCR efektívne jednotky sú aj BCC efektívne, avšak nie naopak. CCR efektívne jednotky sú aj **škálovo efektívne**, keďže veľkosť ich produkcie je optimálna. Jej zmenou produktivita poklesne. Škálovú efektívnosť počítame ako podiel medzi efektívnosťou CCR a **technickou efektívnosťou** podľa BCC modelu.

2.4 Model AR s ohraničenými multiplikátormi

Problém priradenia nulových váh niektorým vstupom alebo výstupom a s tým súvisiacej pseudoefektívnosti patrí k najstarším problémom od uvedenia CCR modelu. Nové riešenie ponúka špeciálny model s ohraničenými multiplikátormi (váhami), nazývaný aj *Assurance Region (AR) model*.

Základnou myšlienkou tohto modelu je ohraničiť pomery váhy - pre nejaké váhy v_i, v_j $(i \neq j)$ pre i-ty a j-ty vstup dodajme podmienku

$$\ell_{i,j} \leq \frac{v_j}{v_i} \leq u_{i,j}. \tag{2.15}$$

Podobných podmienok pre vstupy/výstupy môžeme pridať do modelu potrebné množstvo. Výhodou je, že tieto podmienky môžeme ľahko prepísať do ekvivaletného lineárneho tvaru

$$P^T v \leq 0_\alpha, \quad Q^T u \leq 0_\beta \tag{2.16}$$

pričom $P \in \mathbb{R}^{m\times\alpha}$ a $Q \in \mathbb{R}^{s\times\beta}$ sú matice sú matice špeciálneho tvaru

$$P = \begin{pmatrix} \ell_{12} & -u_{12} & \ell_{13} & -u_{13} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ell_{23} & -u_{23} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Potom výraz $P^T v \leq 0$ zapíšeme po zložkách ako:

$$\ell_{1,2} \leq \frac{v_2}{v_1} \leq u_{1,2}, \qquad \ell_{1,3} \leq \frac{v_3}{v_1} \leq u_{1,3}, \qquad \ell_{2,3} \leq \frac{v_3}{v_2} \leq u_{2,3}$$

Stĺpec matice P, Q vyjadruje jedno horné alebo dolné ohraničenie pre pomer váh. V prípade potreby maticu P ľahko rozšírime o ďalšie stĺpce pre ďalšie pomery váh. Obdobne vytvoríme maticu Q definujúcu pomery výstupných váh.

Pri odvodení AR modelu ideovo výjdeme z vstupne orientovaného CCR modelu, ktorý doplníme o nové ohraničenia na váhy.

$$\begin{array}{lll} \text{(AR-P)} & \max\limits_{u\in R^m,\, v\in R^r} & u^T y^o \\ & \text{pri ohraničeniach} & v^T x^o = 1 \\ & & u^T y^j - v^T x^j \leq 0 \qquad \forall j = 1, 2, ..., n \\ & & P^T v \leq 0_\alpha \\ & & Q^T u \leq 0_\beta \\ & & v \geq 0_m \\ & & u \geq 0_s \end{array} \tag{2.18}$$

Úvar je **AR efektívny**, ak $u^T y^o = 1$. Zrejme efektívnosť podľa AR modelu bude menšia nanajvýš rovná CCR efektívnosti - účelová funkcia je rovnaká, avšak máme menšiu množinu prípustných riešení - prípustných váh. V optimálnom (prípustnom) riešení sú ohraničenia multiplikátorov splnené, často sa realizujú ako aktívne. Z tohto dôvodu treba matice P a Q voliť rozumne.

Rovnako ako pri iných DEA modeloch, aj tu existuje duálny model - obálkový AR model, ktorý má zmysluplnú ekonomickú interpretáciu. V duálnom modeli totiž ide o rozšírenie množiny produkčných možností niektorými smermi tak, aby sa (pôvodne efektívne) jednotky nespĺňajúce ohraničenia váh vo svojom optimálnom riešení presunuli do neefektívnej oblasti.

Obálkový AR model možno teda zapísať v tvare:

$$\begin{array}{lll} \text{(AR-D)} & \min\limits_{\theta,\,\lambda,\,\pi,\,\tau,\,s^X,\,s^Y} & \theta \\ & \text{pri ohraničeniach} & \theta x^o = X\lambda - P\pi + s^X \\ & & y^o = Y\lambda + Q\tau - s^Y \\ & & \lambda \geq 0_n, \pi \geq 0_\alpha, \tau \geq 0_\beta, s^X \geq 0_m, s^Y \geq 0_s \end{array} \tag{2.19}$$

Pritom π, τ sú duálne premenné k podmienkam ohraničenosti váh a v tomto prípade vyjadrujú akési rozšírenie množiny produkčných možností a posunutie efektívnej hranice tak, aby na nej boli požadované ohraničenia multiplikátorov splnené.

Poznámka 2.3 (Hlavná výhoda AR modelu) *Zmysel ohraničení multiplikátorov v Assurance Region modeli tkvie práve v tom, že dodatočné podmienky zmenšujú množinu prípustných riešení. Preto sa často dosahujú nižšie hodnoty efektívnosti a menej útvarov označíme za efektívne.*

Toto je výhodné hlavne v situácii, keď máme málo útvarov alebo veľa dát (vstupov a výstupov). Bez použitia AR väčšinu jednotiek označíme za efektívne (keďže ich nie je s čím porovnávať a váhy sú úplne voľné), použitím AR s apriórne určenými "povolenými" pomermi váh jednotky miera efektívnosti rovnomernejšie rozdelí.

Zároveň voľba ohraničení pre váhy dáva zadávateľovi možnosť sčasti ovplyvniť, akú dôležitosť má DEA jednotlivým vstupom či výstupom priradiť.

Viac o AR modeli možno nájsť v [4].

2.5 Aditívny model s váhami

Podobne ako v prípade BCC modelu aj aditívny model (ADD) predstavuje akési vylepšenie predchádzajúcich modelov. Ukážeme dva možné spôsoby odvodenia tohto modelu - multiplikatívnej a obálkovej formy. Tieto formy sú napriek možným rôznym spôsobom odvodenia navzájom duálne.

2.5.1 Multiplikatívna forma aditívneho modelu

Základná verzia aditívneho modelu sa dá odvodiť priamo z koncepčného modelu, keď podmienky ostrých nerovností (1.19) a (1.18) nahradíme neostrými takto

$$v \geq w^X, u \geq w^Y, \tag{2.20}$$

čím stanovíme akési minimálne váhy, ktorými hodnotíme jednotlivé vstupy a výstupy.

Ohraničenia upravíme podobne ako v CCR modeli do tvaru rozdielu. Podobne zmeníme účelovú funkciu: namiesto maximalizácie zlomkovej efektívnosti (ako v koncepčnom a CCR modeli) sa budeme snažiť zároveň minimalizovať vážený vstup a maximalizovať vážený výstup prostredníctvom maximalizácie ich rozdielu, teda ekonomicky maximalizovať zisk.

Multiplikatívny AD model používame v tvar LP úlohy:

$$\begin{array}{lll} \text{(AD-P)} \quad \max\limits_{u\in R^m,\, v\in R^r} & u^T y^o - v^T x^o & \\ \text{pri ohraničeniach} & u^T y^j - v^T x^j \leq 0 & \forall j = 1,2,...,n \\ & v \geq w^X & \\ & u \geq w^Y & \end{array} \tag{2.21}$$

AD-P efektívnosť sa prejavuje dosiahnutím hranice $E^j(u,v) = \frac{u^T y^j}{v^T x^j} = 1$, t.j. pre hodnotu $\beta^* = 0$ účelovej funkcie úlohy (2.21). Pre $\beta^* \in (-\infty, 0)$ sa jedná o neefektívnosť.

Čo sa týka ohraničení váh w^X, w^Y, tieto ak sú kladné, môžu odrážať postoj vyhodnocovateľa a byť prakticky ľubovoľné. Efektívne útvary to neovplyvní: ak má totiž úloha (2.21) optimálne riešenie pre nejaké kladné váhy $u^* > 0, v^* > 0$, tak aj riešenie (cu^*, cv^*) pre nejaké $c > 0$ je prípustné v prvom ohraničení, pričom hodnota účelovej funkcie sa c-násobí a v prípade efektívnych jednotiek zostane 0, t.j. aj (cu^*, cv^*) je optimálne riešenie. Tým pádom pre nejaké $c \to +\infty$ bude platiť $cv^* \geq w^X$ a $cu^* \geq w^Y$. Avšak v prípade neefektívnych jednotiek sa použijú práve čo najmenšie váhy (zdola ohraničené zadávateľom) tak, aby hodnota účelovej funkcie bola čo najväčšia - čo najbližšie 0.

Model je prípustný pre každé kladné minimálne váhy a zároveň dokáže odhaľovať aj pseudoefektívnosť - nulové váhy nie sú prípustné, takže model hľadá čo najoptimálnejšie riešenie pre kladné váhy. To sú jeho výhodné vlastnosti.

2.5.2 Obálkový aditívny model

Aditívny model v multiplikatívnej forme (2.21) je úlohou lineárneho programovania, takže k nemu môžeme odvodiť duálny model - opäť sa jedná o ekvivalentný model v obálkovej forme. Opticky sa však naň dá pozerať aj ako na zlepšenie modelu (2.10) a jej ε-účelovej funkcie (2.11). Vynecháme "nepotrebnú" premennú θ a dosadením akýchsi kladných váh pre vstupné a výstupné rezervy w^X a w^Y (konkrétne určíme neskôr) do účelovej funkcie.

Príslušná úloha lineárneho programovania má potom tvar

$$\begin{array}{ll} \text{(AD-D)} \quad \min\limits_{\lambda\in R^n,\, s^X\in R^m,\, s^Y\in R^r} & -\Big((w^X)^T s^X + (w^Y)^T s^Y\Big) \\ \text{pri ohraničeniach} & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x^i - s^X = x^o \\ & \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y^i + s^Y = y^o \\ & \lambda \geq 0, s^X \geq 0, s^Y \geq 0 \end{array} \tag{2.22}$$

Úlohu riešenú modelom môžeme ekonomicky interpretovať ako snahu maximalizovať vážený priemer rezerv (vzdialeností od fiktívnej efektívnej jednotky vytvorenej kombináciou iných jednotiek). Keďže rezervy môžu byť len nezáporné a váhy predpokladáme kladné, tak hodnota účelovej funkcie β úlohy (2.22) môže byť $\beta^* \in (-\infty; 0]$.

Zrejme efektivita sa dosahuje pri nulových rezervách (podobne ako v nižších modeloch), podmienka nulových rezerv je ekvivalentná podmienke $\beta^* = 0$. Teda útvar je **AD-D efektívny** (rovnako ako v multiplikatívnom modeli) pri hodnote 0 účelovej funkcie.

Preto je výhodnou vlastnosťou AD modelu práve toto odhaľovanie pseudoefektívnosti cez maximalizáciu rezerv.

2.5.3 Možnosti voľby váh

Ako sme spomenuli, váhy určuje zadávateľ. Tieto sa dajú určiť apriórne (vopred) napríklad ako **jednotkové** alebo váhy **reflektujúce** predpokladané vzťahy medzi jednotlivými veličinami.

Môžeme si však všimnúť, že v aditívnom modeli (napríklad v tvare úlohy (2.22)) absentuje podstatnú vlastnosť - **invariantnosť na zmenu jednotiek**. Efektívne jednotky to neovplyvní, avšak v prípade neefektívnych sa budú brať relatívne rovnako veľké rezervy s rozličnou váhou. Napríklad požadovaná úspora 10 000 na prevádzkových nákladoch (napr. 1%) nie je ekvivalentná požadovanej úspore 10 000 na počte zamestnancov (napr. 50%). Práve tieto rozličné jednotky (rôzne veľké čísla) ukazujú potrebu zvoliť vhodné váhy.

Práve voľbou vhodných váh vieme zabezpečiť dokonca invariantnosť na zmenu jednotiek. Váhy sa budeme snažiť voliť ako nejakú štatistiku (funkciu) dát, ktoré máme k dispozícii. (Jedná sa preto o aposteriórne určenie váh.)

Ako najvhodnejšia pre potreby DEA sa ukázala byť voľba váh ako **prevrátenej hodnoty štandardnej odchýlky** príslušného vstupu / výstupu. Teda konkrétne:

$$w_i^X = \frac{1}{\sigma_i^X} \qquad \forall i = 1, 2, ..., m \tag{2.23}$$

$$w_j^Y = \frac{1}{\sigma_j^Y} \qquad \forall j = 1, 2, ..., s \tag{2.24}$$

Pričom štandardnú odchýlku i-teho vstupu počítame cez nevychýlený odhad ako

$$\sigma_i^X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{o=1}^{n}(x_i^o - \overline{x}_i)^2}, \qquad \text{kde} \quad \overline{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{o=1}^{n} x_i^o$$

Nevýhodou takéhoto prístupu je veľká závislosť vyhodnocovania efektívnosti na extrémnych jednotkách, ktoré sa v skupine môžu vyskytovať. Ďalšie možnosti voľby váh podrobnejšie rozoberá práca [7, strany 13-14]. My ukážeme, že v prípade SBM modelu tento problém riešime novým prístupom.

2.5.4 Prevod na percentuálnu efektívnosť

Ďalší problém aditívneho modelu je chýbajúca hodnota efektívnosť z intervalu [0,1] (resp. 0% až 100%), ktorá sa dá jednoducho ekonomicky interpretovať. Optimálna hodnota účelovej funkcie β^* totiž leží v intervale $(-\infty, 0]$. Preto bolo potrebné nájsť interpretáciu, ktorá by hodnotu β^* vhodne naškálovala čo najlepšiu výpovednú hodnotu.

Problém riešili autori článku [10, kapitola 4], ktorí efektivitu merali niekoľkými spôsobmi:

- E_O - ako transformovaná hodnota účelovej funkcie, pri lineárnej transformácii 95% útvarov malo efektivitu nad 0,9. Ďalšou možnosťou bolo $E_O = e^{\beta^*}$. Táto dáva zaujímavé výsledky, ale neujala sa pre chýbajúce ekonomické zdôvodnenie takéhoto prístupu.

- E_P - počítaná z primárnej úlohy, využitím virtuálnej efektívnej jednotky
- E_D - počítaná z duálnej úlohy, ukázala sa ako rovnomerne rozdelená a preto najvhodnejšia pre potreby zadávateľa

Ako autori článku naznačili, práve kombináciou druhého a tretieho spôsobu prichádzame k podobnému hodnoteniu efektivity ako v prípade SBM modelu, o ktorom bude reč v ďalšej kapitole.

3 SBM model

V tejto kapitole si predstavíme jeden zo skupiny aditívnych modelov - **SBM model** - pôvodne uvedený Tonem a spol. v rokoch 2000-2001. Ukážeme jeho myšlienku, silné stránky v odhaľovaní pseudoefektívnosti a ďalšie vlastnosti, ako aj jeho neskoršie modifikácie.

3.1 Motivácia odvodenia

Ani dvadsať rokov od zverejnenia prvého CCR modelu nebolo možné považovať problematiku porovnávania jednotiek v skupine za definitívne vyriešenú. Po demonštráci chybnej funkčnosti základného CCR modelu, ktorý zjavne neefektívne jednotky z pseudoefektívnej hranice označil za efektívne sa objavil aditívny model. Prišiel s translačnou invariantnosťou, problém efektívnosti z intervalu $(-\infty, 0]$ sa však nepodarilo uspokojivo vyriešiť. Vývoj musel pokračovať.

Ukážeme si stručne jednotlivé vylepšenia. Spomeňme si na základný CCR model v obálkovej forme.

$$
\begin{aligned}
\text{(CCR-D)} \qquad & \min_{\lambda\in R^n,\theta\in R} && \theta \\
& \text{pri ohraničeniach} && \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i \leq \theta x^o \\
& && \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y^i \geq y^o \\
& && \lambda \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Nasledovníkom bol BCC model, ktorý dodal podmienku pre potreby konštantných výnosov z rozsahu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ a rozšíril účelovú funkciu o ďalší člen s malou váhou

$$-\varepsilon.\Big(\sum_{j=1}^{m} s_j^X \; + \; \sum_{j=1}^{s} s_j^Y \Big),$$

teda úloha okrem nájdenia najmenšej zdôvodniteľnej efektívnosti θ zároveň maximalizovala veľkosť rezervy (slacku) a tak odhaľovala aj ostatné zdroje neefektívnosti popri neefektívnosti z pomeru vstupov a výstupov.

Rovnakou cestou sa vybral aditívny model, ktorý úplne vynechal θ ako mieru efektívnosti a rezervám pridal váhy, čím dostávame účelovú funkciu

$$\text{(AD-D)} \qquad \min \quad -\Big((w^X)^T s^X + (w^Y)^T s^Y \Big) = \beta^* \in (-\infty, 0] \tag{3.2}$$

pričom váhy w^X, w^Y považujeme za rovnaké pre všetky jednotky. Vtedy prišla prelomová myšlienka - čo tak zvoliť váhy pre každý útvar zvlášť? Napríklad pre jednotku DMU$_o$ podľa vzťahov

$$w_i^{oX} = \frac{1}{x_i^o}, \quad i = 1, ..., m, \qquad w_j^{oY} = \frac{1}{y_j^o}, \quad j = 1, ..., s \tag{3.3}$$

Takouto voľbou dostávame špeciálny aditívny model, od ktorého je už len krok k výslednému SBM modelu.

$$(\text{AD} \to \text{SBM}) \qquad \min \quad -\Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^X}{x_i^o} + \sum_{j=1}^{s} \frac{s_j^Y}{y_j^o}\Big) \tag{3.4}$$

3.2 Matematický model

Model SBM je pomenovaný podľa základného princípu vychádzajúceho z merania rezerv hodnotami veličín - SBM značí Slacks-Based Measure. (Takéto meranie naznačila už rovnica (3.4).)

Definícia 3.1 *Definujme* **SBM efektivitu** ρ^o *útvaru o ako zlomok - pomocou podielu priemeru relatívnej vstupnej neefektívnosti a priemeru relatívnej výstupnej neefektívnosti nasledovne:*

$$\rho^o = \frac{1 - \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^X}{x_i^o}}{1 + \dfrac{1}{s}\displaystyle\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^Y}{y_r^o}} \tag{3.5}$$

pričom označenia sú v súlade doterajším značením - s^X *a* s^Y *vyjadrujú rezervy oproti fiktívnej efektívnej jednotke.*

Efektivita jednotky DMU$_o$ podľa SBM modelu je teda riešením úlohy matematického programovania

$$(\text{SBM}) \qquad \min_{\lambda,\, s^X,\, s^Y} \quad \rho = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^X / x_i^o}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^Y / y_r^o} \tag{3.6}$$

$$\text{pri ohraničeniach} \quad x_i^o = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_i^j + s_i^X \qquad i = 1, 2, ..., m \tag{3.7}$$

$$y_r^o = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_r^j - s_r^Y \qquad r = 1, 2, ..., s \tag{3.8}$$

$$\lambda \geq 0, s^X \geq 0, s^Y \geq 0 \tag{3.9}$$

pričom ohraničenia (3.7), (3.8) budeme písať aj v maticovo-vektorom tvare.

Definícia 3.2 *Jednotka DMU charakterizovaná* (x^o, y^o) *je* **SBM efektívna** *vtedy, ak úloha (3.6) má optimálne riešenie* $\rho^* = 1$.

Poznámka 3.3 *Tento model predpokladá, že všetky vstupy aj výstupy sú kladné. Tone v knihe [4, str. 97] navrhol možné riešenie prípadnej chyby reálnych dát nasledovne: ak* $x_i^o = 0$, *zrušíme člen* $s_i^X / x_i^o = 0$ *v účelovej funkcii. Ak* $y_i^o \leq 0$, *nahradíme ho veľmi malým kladným číslom a výraz* s_r^Y / y_r^o *potom pôsobí ako sankcia.*

3.2.1 Prevod na úlohu lineárneho programovania

Matematický model (3.6) - (3.9) však predstavuje úlohu zlomkového programovania - je preto výhodné previesť ju na úlohu lineárneho programovania, ktorá je jednoduchšie riešiteľná. Využijeme postup, ktorý naznačil už Tone [4, strany 97-99].

Vzhľadom na kladný menovateľ (predpokladáme kladné rezervy vo výstupoch) môžeme zlomok v účelovej funkcii rozšíriť skalárom $t > 0$. Takto získavame homogénnu účelovú funkciu (pre rôzne $t > 0$ dostávame rovnakú hodnotu funkcie). Túto nejednoznačnosť rovnako ako pri CCR modeli vyriešime zafixovaním menovateľa v ohraničení rovnosťou 1.

Model po úpravách:

$$\text{(SBM t)} \qquad \min_{\lambda, s^X, s^Y, t} \qquad \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} t s_i^X / x_i^o \tag{3.10}$$

$$\text{pri ohraničeniach} \qquad 1 = t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} t s_r^Y / y_r^o \tag{3.11}$$

$$x^o = X^T\lambda + s^X$$
$$y^o = Y^T\lambda - s^Y$$
$$\lambda \geq 0, s^X \geq 0, s^Y \geq 0, t > 0$$

Všimnime si ostrú nerovnosť $t > 0$. Táto bráni tomu, aby sme model upravili na úlohu lineárneho programovania. Ukážeme však, že pridaním možnosti $t = 0$ sa nič nezmení, keďže $t = 0$ nie je prípustné riešenie úlohy (SBM t).

Predpokladajme teda $t = 0$. Potom podľa (3.11) musí platiť:

$$1 = t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} t s_r^Y / y_r^o = 0 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} 0 s_r^Y / y_r^o = 0,$$

čo je spor. Preto podmienka $t \geq 0$ v modeli (3.10) je ekvivalentná pôvodnej podmienke.

Ponúka sa nám vhodná substitúcia (pre $t > 0$ navyše invertovateľná).

$$S^X = t s^X, \;\; S^Y = t s^Y, \;\; \Lambda = t\lambda \tag{3.12}$$

Jej aplikovaním získame model v tvare úlohy lineárneho programovania.

$$\text{(SBM LP)} \qquad \min_{\Lambda, S^X, S^Y, t} \qquad \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i^X / x_i^o \tag{3.13}$$

$$\text{pri ohraničeniach} \qquad 1 = t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} S_r^Y / y_r^o$$

$$t x^o = X^T\Lambda + S^X$$
$$t y^o = Y^T\Lambda - S^Y$$
$$\Lambda \geq 0, S^X \geq 0, S^Y \geq 0, t \geq 0$$

Tým sme získali novú úlohu LP. Nech táto má v optimálnom riešení hodnotu účelovej funkcie τ^*, potom SBM model má optimálnu hodnotu účelovej funkcie

$$\rho^* = \tau^*.$$

T.j. efektívnosť SBM môžeme počítať pomocou LP úlohy (3.13). Ostatné premenné SBM modelu v prípade potreby získame invertovaním vzťahov (3.12).

3.3 Kľúčové vlastnosti SBM modelu

Veta 3.4 (Nulové rezervy) *Jednotka je SBM efektívna ($\rho^* = 1$) práve vtedy, ak optimálne riešenie úlohy (3.6) - (3.9) má nulové rezervy $s^{*X} = 0$ a $s^{*Y} = 0$.*

D ô k a z. Označme vo výraze (3.6) čitateľ $\mathcal{C}$ a menovateľ $\mathcal{M}$:

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^X/x_i^o}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^Y/y_r^o} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{M}}$$

Ukážeme, že $\mathcal{C} \in [0,1]$ a $\mathcal{M} \in [1,\infty)$. Potom $\rho^* = 1 = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{M}}$ iba ak $\mathcal{C} = \mathcal{M} = 1$.

$$0 \leq C = 1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^X/x_i^o \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s_i^X}{x_i^o} \leq 1 \ \forall i \tag{3.14}$$

$$1 \geq \mathcal{C} = 1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^X/x_i^o \quad \Leftrightarrow \quad s_i^X \geq 0 \ \forall i \tag{3.15}$$

Pritom druhá nerovnosť v (3.14) platí: rezerva - prekročenie množstva vstupov môže byť maximálne o hodnotu použitého vstupu (uvažujeme len kladné vstupy). Druhá nerovnosť v (3.15) platí z ohraničení. Analogicky dokážeme nerovnosť pre $\mathcal{M}$:

$$1 \leq \mathcal{M} = 1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^Y/y_r^o \quad \Leftrightarrow \quad s_r^Y \geq 0 \ \forall r, \tag{3.16}$$

čo je opäť nezápornosť rezerv vyplývajúca z ohraničení. Z rovnosti $\mathcal{M} = \mathcal{C}$ a nerovností $1 \leq \mathcal{M} = \mathcal{C} \leq 1$ vyplýva $\mathcal{M} = 1 = \mathcal{C}$, teda $\rho^* = 1$. ∎

V odrážkach uvádzame prehľad základných vlastností SBM modelu (dôkazy možno nájsť v literatúre, napr. [4]).

- **efektivita** leží medzi 0 a 1, navyše ostáva 1 iba v prípade, že DMU jednotka nevykazuje žiadny druh neefektívnosti
- bez potreby ďalších výpočtov odhaľuje aj **pseudoefektívnosť** - problém priradenia nulových váh vstupom alebo výstupom
- **monotónnosť** - zväčšením slackov s_i^X a s_j^Y rovnomerne klesne miera efektívnosti
- zohľadňuje **všetky druhy neefektivity** - technickú (ako BCC, CCR orientované modely) aj ostatné druhy (mix, škálovú, cenovú a iné), preto platí $E_{SBM} \leq E_{CCR}$, teda SBM vracia nižšie hodnoty efektívnosti
- **SBM efektívne** jednotky sú aj CCR efektívne, CCR pseudoefektívne sú SBM neefektívne
- **jednotková invariantnosť** - výstup modelu nezávisí od voľby jednotiek jednotlivých vstupov a výstupov

- **nie je** invariantný na posun
- **výnosy z rozsahu** - môžu byť podľa ohraničení konštantné alebo variabilné
- **projekcia** na efektívnu množinu

$$\hat{x^o} = x^o - s^{X*}$$

$$\hat{y^o} = y^o + s^{Y*}$$

3.4 Duálny SBM model

Poznámka 3.5 *Pre zjednodušenie zápisu v ďalšej časti pre vektor* $z = (z_1, \ldots, z_k)^T$ *definujme výraz* $1/z$ *ako*

$$\frac{1}{z} = \Big(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_k}\Big)^T.$$

Podobne ako v CCR a BCC modeloch, aj v prípade SBM modelu môžeme odvodiť duálny model ako duálnu úlohu k úlohe LP riešiacej model - vyjdeme z úlohy (3.13), ktorú prepíšeme do tvaru:

$$\min \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0_n^T & (-\frac{1}{m}\frac{1}{x^o})^T & 0_s^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \Lambda \\ S^X \\ S^Y \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_n^T & 0_m^T & (\frac{1}{s}\frac{1}{y^o})^T \\ -x^o & X^T & I_m & 0_{s\times m} \\ -y^o & Y^T & 0_{m\times s} & -I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \Lambda \\ S^X \\ S^Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0_m \\ 0_s \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

$$\begin{pmatrix} t & \Lambda & S^X & S^Y \end{pmatrix}^T \geq 0_{1+n+m+s} \tag{3.19}$$

Zvoľme si duálne premenné $\theta \in \mathbb{R}, \hat{v} \in \mathbb{R}^m, \hat{u} \in \mathbb{R}^s$. K úlohe v tomto tvare môžeme zapísať duálnu úlohu:

$$\max \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0_m^T & 0_s^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \hat{v} \\ \hat{u} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (-x^o)^T & (-y^o)^T \\ 0_n & X & Y \\ 0_m & I_m & 0_{s\times m} \\ \frac{1}{s}\frac{1}{y^o} & 0_{m\times s} & -I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \hat{v} \\ \hat{u} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 0_n \\ -\frac{1}{m}\frac{1}{x^o} \\ 0_s \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Duálnu úlohu prepíšeme do obvyklého tvaru.

$$
\begin{array}{llll}
\text{(D'-SBM)} & \max & \theta & \\
 & \text{pri ohraničeniach} & \theta - (x^o)^T\hat{v} - (y^o)^T\hat{u} & \leq 1 \\
 & & X\hat{v} + Y\hat{u} & \leq 0 \\
 & & \hat{v} & \leq -\frac{1}{m}\frac{1}{x^o} \\
 & & \theta\frac{1}{s}\frac{1}{y^o} - \hat{u} & \leq 0
\end{array}
\tag{3.22, 3.23}
$$

Zaveďme substitúciu $v = -\hat{v}$ a $u = \hat{u}$, tým model prejde na obvyklý multiplikatívny tvar.

Všimnime si nerovnicu (3.23). Nerovnicou je kvôli podmienke $t \geq 0$ v úlohe (3.6). Táto je však zbytočná, keďže nielen $t = 0$, ale aj $t < 0$ je v danej úlohe neprípustné. Vynechaním podmienky $t \geq 0$ v úlohe (3.6) nerovnosť (3.23) prejde na rovnicu. Tým pádom môžeme urobiť ďalšiu substitúciu

$$\theta = 1 - v^T x^o + u^T y^o.$$

Potom môžeme odvodený duálny multiplikatívny SBM model zapísať vo výslednom tvare:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(D-SBM)} & \max\limits_{\theta\in R,\ v\in R^m,\ u\in R^s} & 1 + u^T y^o - v^T x^o & \equiv \theta \\
 & \text{pri ohraničeniach} & -Xv + Yu & \leq 0 \\
 & & \frac{1}{m}\frac{1}{x^o} & \leq v \\
 & & \left(1 - v^T x^o + u^T y^o\right).\frac{1}{s}\frac{1}{y^o} & \leq u
\end{array}
\tag{3.24}
$$

V tomto modeli je efektívnosť θ definovaná ako

$$\theta = 1 - v^T x^o + u^T y^o,$$

pričom **D-SBM efektívna** jednotka má $\theta^* = 1$. Z ohraničení dostávame prirodzenú podmienku $\theta \leq 1$.

Ekonomickou interpretáciou tohto modelu je maximalizáciu zisku - zapísaného ako rozdiel váženého výstupu a vstupu.

3.5 SBM model s váhami

V literatúre (napr. [5]) možno nájsť praktické aplikácie váhového W-SBM modelu. Do účelovej funkcie sa doplnia váhy, čím model prejde do tvaru:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(W-SBM)} \min\limits_{\lambda,\ s^X,\ s^Y} & \rho = \dfrac{1 - \sum_{i=1}^m w_i.s_i^X/x_i^o}{1 + \sum_{r=1}^s q_r.s_r^Y/y_r^o} & \\
\text{pri ohraničeniach} & x_i^o = \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j x_i^j + s_i^X & i = 1, 2, ..., m \\
 & y_r^o = \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j y_r^j - s_r^Y & r = 1, 2, ..., s \\
 & \lambda \geq 0, s^X \geq 0, s^Y \geq 0 &
\end{array}
\tag{3.25}
$$

Pritom w_i sú váhy veličín vstupu a q_r váhy veličín výstupu. Váhy môžu tak odrážať postoje vyhodnocovateľa k dôležitosti (napríklad cene) jednotlivých vstupov a výstupov.

Tento model však nepredstavuje veľký teoretický posun - keďže váhy musia byť opäť kladné (aby bol model zmysluplný), efektívne jednotky neovplyvní. Tie majú totiž nulové rezervy a tak zostávajú efektívne pri ľubovoľných váhach.

Čo sa zmení je iba veľkosť miery efektívnosti pri neefektívnych jednotkách. Teda špecifické váhy umožnia usporiadať neefektívne jednotky podľa zadaného kritéria (rezervy v konkrétnom vstupe či výstupe).

3.6 Negatívne vstupy a výstupy ako modifikácia SBM

Podstatným problémom DEA analýzy je vysporiadanie sa z **produkčnými externalitami** (negatívnymi výstupmi) a **želateľnými vstupmi**. U týchto totiž chceme externality (negatívne výstupy) minimalizovať a želateľné (záporné) vstupy maximalizovať. To je presne naopak ako v prípade "normálnych" vstupov a výstupov. Vo všeobecnosti v DEA je totiž základným predpokladom kladnosť (nezápornosť) dát.

Situácie, kde sa záporné vstupy a výstupy vyskytujú, totiž nie sú ničím nezvyčajné. Príklady sú prevzaté z [8], [9].

Príklad 3.6 (Efektívnosť reklamných kampaní) *Uvažujme dáta*
Kladné vstupy - náklady na kampaň
Záporné vstupy - percento spotrebiteľov negatívne vnímajúcich značku pred kampaňou
Kladné výstupy - percento spotrebiteľov pozitívne vnímajúcich značku po kampani
Záporné výstupy - percento spotrebiteľov negatívne vnímajúcich značku po kampani

Príklad 3.7 (Farmy na likvidáciu znečistenia) *Uvažujme dáta*
Kladné vstupy - cena práce, cena materiálu
Záporné vstupy - spotrebované výkaly
Kladné výstupy - výroba kompostu, elektrickej energie
Záporné výstupy - znečistenie ťažkými kovmi

Poznamenajme, že negatívne vstupy a výstupy môžeme rozdeľovať na **prirodzené** a **vyvarovateľné**. Prirodzene negatívnymi rozumieme napríklad dĺžku, hmotnosť - veličiny, kde používame relatívnu škálu. U týchto požadujeme iba jednotkovú invariantnosť.

Vyvarovateľne negatívnymi rozumieme rôzne intervaly, napríklad teplotu. V tomto prípade nemá zmysel dvojnásobná teplota. V prípade takýchto údajov požadujeme nielen jednotkovú ale aj translačnú invariantnosť.

Spôsoby, ako sa dá s týmto problémom vysporiadať, sú rôzne. Niektoré softvéry prikladajú záporným vstupom / výstupom nulovú váhu. Ďalšou často uplatňovanou možnosťou je brať negatívne výstupy ako vstupy (tým pádom ich minimalizovať) a želané vstupy berieme ako výstupy (tým pádom ich maximalizujeme). Tento postup však nie je univerzálne použiteľný.

Jednou z jednoduchších možností je použitie aditívneho modelu, v ktorom sa pozitívne a negatívne vstupy hodnotia samostatne.

Nás však zaujíma, ako možno modifikovať SBM model pre použitie v tejto situácii. Autor článku [8] navrhuje dve riešenia problému úpravou SBM modelu. Prvým je zahrnúť rezervy do menovateľa, čím výrazy prejdú do tvaru

$$\sum \frac{s_i^X}{x_i^o + s_i^X}.$$

Pozitívne je, že efektívnosť leží medzi 0 a 1 pričom 1 sa dosahuje iba v prípade nulovosti rezerv. Značnou nevýhodou tohto prístupu však je, že model nie je v tvare úlohy lineárneho programovania.

Druhou možnosťou je takzvaný zlomok cena-výnos (angl. *Cost Benefit Ratio*). Opäť sa jedná o prihliadanie na negatívne výstupy ako na vstupy a naopak.

3.6.1 Modifikovaný SBM model

Výsledkom predchádzajúcich úvah bol modifikovaný tzv. **M-SBM model**. V tejto časti stručne odprezentujeme tento model založený na zovšeobecnení SBM, v ktorom sa môžu vyskytovať rovnako záporné vstupy aj výstupy.

Budeme predpokladať

a) aspoň jeden želateľný (kladný) výstup

b) aspoň jeden minimalizovaný (kladný) vstup

c) ľubovoľný počet negatívnych vstupov a výstupov

Pritom prvé dva predpoklady sú technické (pre zjednodušenie ďalších úvah) a tretí predpoklad nám umožňuje ľubovoľný rozmer úlohy. Označíme si pomocnú veličinu.

Definícia 3.8 *Definujme veličinu* **SP rozsah** *(z angl.* SP Range*) pre konkrétny vstup / výstup nasledovne:*

$$P_i^{oX} = x_i^o - \min_{k=1,\dots,n}(x_i^k) \tag{3.26}$$

$$P_r^{oY} = \max_{k=1,\dots,n}(y_r^k) - y_r^o \tag{3.27}$$

Jedná sa o vzdialenosť od ideálneho bodu - najmenšieho vstupu (v prípade záporného vstupu najväčšej hodnoty) a najväčšieho výstupu (opäť v prípade nežiadúceho výstupu je to najmenšia číselná hodnota).

Poznamenajme, že v prípade $P_i^{oX} = 0$, $P_r^{oY} = 0$ vynechávame príslušný člen v účelovej funkcii, rovnako ako v prípade štandardného SBM modelu.

Pomocou tejto veličiny môžeme definovať M-SBM model ako nasledovnú úlohu matematického programovania:

$$\text{(M-SBM)} \qquad \min \qquad \rho = \frac{1 - \sum_{i=1}^{m} w_i s_i^X / P_i^{oX}}{1 + \sum_{r=1}^{s} v_r s_r^X / P_r^{oY}} \tag{3.28}$$

$$\text{pri ohraničeniach} \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_i^j + s_i^X = x_i^o \qquad i = 1, 2, ..., m \tag{3.29}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_r^j - s_r^Y = y_r^o \qquad r = 1, 2, ..., s \tag{3.30}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \tag{3.31}$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1, \qquad \sum_{r=1}^{s} v_r = 1 \tag{3.32}$$

$$w \geq 0, v \geq 0, \lambda \geq 0, s^X \geq 0, s^Y \geq 0 \tag{3.33}$$

Pritom podmienka (3.31) hovorí o konštantných výnosoch z rozsahu a v prípade potreby ju možno vynechať. Podmienka (3.32) hovorí o normalizácii váh a je len technickým predpokladom. Model sa dá upraviť na úlohu LP analogickým spôsobom ako základný SBM model.

M-SBM efektívnosť sa dosahuje opäť pri $\rho^* = 1$, miera efektívnosti opäť padá do rozumného intervalu [0,1] (viď dôkaz v [9]). Problém nulových váh nevzniká - keďže sa hľadajú váhy minimalizujúce efektívnosť.

Celkovo možno M-SBM model hodnotiť veľmi pozitívne, práca so zápornými číslami je jeho najväčším prínosom a rozšírením oproti SBM modelu, pričom si zachováva jeho dobré vlastnosti.

3.7 Ohraničenie multiplikátorov v SBM-AR modeli

Za jednu z nevýhod *modelu Slacks-Based Measure* považujeme neschopnosť vysporiadať sa s veľkým počtom dát a malým počtom jednotiek. Celkový počet vstupov a výstupov by nemal prekročiť tretinu počtu útvarov DMU. V opačnom prípade nie je dostatok priestoru na porovnávanie jednotiek a tak len málo útvarov môžeme označiť za neefektívne. Veľká časť má dokonca 100% efektívnosť.

Tento problém sa pokúsime odstrániť využitím myšlienky *Assurance Region modelu*, ktorý sa s touto situáciou vysporadúva pomocou dodatočných ohraničení multiplikátorov (váh). Túto vlastnosť AR modelu prenesieme do SBM, čím vytvoríme kombinovaný **SBM-AR model**. Od tohto očakávame rovnomernejšie rozdelenie útvarov podľa miery efektívnosti aj v prípade veľkého množstva dát.

Odvoďme tento kombinovaný model. Vyjdeme z modelu SBM (3.6), ktorý prepíšeme nasledovne do maticovo-vektorového zápisu:

$$\begin{array}{lll} \text{(SBM)} & \min\limits_{\lambda,\, s^X,\, s^Y} & \rho = \dfrac{1 - \frac{1}{m} s^X / x^o}{1 + \frac{1}{s} s^Y / y^o} \\ \text{pri ohraničeniach} & & x^o = X^T \lambda + s^X \\ & & y^o = Y^T \lambda - s^Y \\ & & \lambda \geq 0, s^X \geq 0, s^Y \geq 0 \end{array} \tag{3.34}$$

Fixovaním $\theta = 1$ duálneho (obálkového) AR modelu (2.19) dostávame upravené ohraničenia:

$$\text{(AR)} \quad \theta \equiv 1 \qquad x^o = X^T \lambda - P\pi + s^X \tag{3.35}$$

$$y^o = Y^T \lambda + Q\tau - s^Y \tag{3.36}$$

$$\lambda \geq 0_n, \pi \geq 0_\alpha, \tau \geq 0_\beta, s^X \geq 0_m, s^Y \geq 0_s$$

Všimnime si rovnice (3.35), (3.36). Člen $X^T\lambda$, resp. $Y^T\lambda$ vyjadruje lineárnu kombináciu útvarov. Vektory s^X, s^Y používame len na meranie veľkosti rezervy. Samotné obmedzenie váh (resp. v prípade duálneho AR modelu zväčšenie množiny prípustných riešení) potom realizovujú iba členy $-P\pi$ a $+Q\tau$, kde P, Q sú matice špeciálneho tvaru (ako uvádzame v časti o AR).

Doplňme tieto dva členy a premenné π, τ aj do SBM modelu. Tým vznikne kombinovaný SBM-AR model v tvare

$$\begin{array}{lll} \text{(SBM-AR')} & \min\limits_{\lambda,\, \pi,\, \tau,\, s^X,\, s^Y} & \rho = \dfrac{1 - \frac{1}{m} s^X / x^o}{1 + \frac{1}{s} s^Y / y^o} \\ \text{pri ohraničeniach} & & x^o = X^T \lambda - P\pi + s^X \\ & & y^o = Y^T \lambda + Q\tau - s^Y \\ & & \lambda \geq 0, \pi \geq 0_\alpha, \tau \geq 0_\beta, s^X \geq 0, s^Y \geq 0 \end{array} \tag{3.37}$$

Analogicky ako v SBM môžeme definovať **efektívnosť SBM-AR** ako hodnotu funkcie ρ^* v optimálnom riešení.

Zostáva ukázať, že nový model má zmysel. To však nie je ťažké. Pre $\tau = 0, \pi = 0$ (čo je prípustné riešenie nového modelu) dostávame pôvodný model, takže pôvodné riešenie SBM modelu je prípustné aj v SBM-AR. Nový model teda bude *prípustný.* Avšak zmenou vektorov π, τ môže vzrásť veľkosť rezerv s^X, s^Y, čím poklesne hodnota účelovej funkcie ρ.

SBM efektívne útvary buď efektívne zostanú (spĺňali ohraničenia váh a teda majú stále nulové rezervy), alebo sa stanú neefektívnymi, budú mať kladné rezervy a teda ich miera efektívnosti bude menšia ako 1.

Problém môže byť pre $\rho < 0$. Nielenže máme problém ekonomicky interpretovať hodnotu účelovej funkcie, ale v takom prípade navyše model ani nemusí byť ohraničený a teda nemá optimálne riešenie. Takáto situácia v prípade SBM modelu nemohla nastať, keďže z ohraničenia

$$x_i^o = \underbrace{x_i^T \lambda}_{\text{kladné}} + s_i^X \qquad i \in 1, 2, ..., m \tag{3.38}$$

priamo vyplývalo $s_i^X \leq x_i^o$, čo je postačujúcou podmienkou kladnosti čitateľa účelovej funkcie. V našom prípade však

$$x_i^o = \underbrace{x_i^T \lambda}_{\text{kladné}} - \underbrace{P_i \pi}_{?} + s_i^X \qquad i \in 1, 2, ..., m \tag{3.39}$$

teda nový člen môže byť kladný aj záporný, keďže v matici P sa vyskytuje pomerne veľa záporných čísel a $\pi \geq 0$. Navyše, minimálna hodnota účelovej funkcie sa dosahuje pre maximálne rezervy a práve tieto sa dosahujú pri zápornom člene $-P_i\pi$.

Toto však môže ohroziť celý proces merania efektívnosti, preto nepripustíme tento prípad v modeli. Buď záverečnou transformáciou $\hat{\rho}^* = \max(0, \rho^*)$, alebo novým ohraničením $1 - \frac{1}{m}s^X/x^o \geq 0$, resp. ekvivalentnou podmienkou $s^X/x^o \leq m$.

Takto dostávame konečnú verziu kombinovaného modelu.

$$
\begin{aligned}
\text{(SBM-AR)} \quad & \min_{\lambda,\,\pi,\,\tau,\,s^X,\,s^Y} && \rho = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} s_i^X/x_i^o}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} s_r^Y/y_r^o} \\
& \text{pri ohraničeniach} && x^o = X^T\lambda - P\pi + s^X \\
& && y^o = Y^T\lambda + Q\tau - s^Y \\
& && \sum_{i=1}^{m} s_i^X/x_i^o \leq m \\
& && \lambda \geq 0, \pi \geq 0_\alpha, \tau \geq 0_\beta, s^X \geq 0, s^Y \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Kombinovaný SBM-AR model môžeme analogicky ako v prípade základného SBM modelu previesť na úlohu lineárneho programovania. (Táto je výhodná hlavne pri počítačovej realizácii merania efektívnosti.)

Transformáciou pre $t > 0$

$$
\begin{aligned}
S^X &= ts^X \\
S^Y &= ts^Y \\
\Lambda &= t\lambda \\
\Pi &= t\pi \\
\Gamma &= t\tau
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

dostávame

$$
\begin{aligned}
\text{(SBM-AR LP)} \quad & \min_{\Lambda,\Pi,\Gamma,S^X,S^Y,t} && \rho = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i^X/x_i^o \\
& \text{pri ohraničeniach} && 1 = t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} S_r^Y/y_r^o \\
& && tx^o = X^T\Lambda - P\,\Pi + S^X \\
& && ty^o = Y^T\Lambda + Q\,\Gamma - S^Y \\
& && \sum_{i=1}^{m} S_i^X/x_i^o \leq tm \\
& && \Lambda \geq 0, \Pi \geq 0_\alpha, \Gamma \geq 0_\beta, S^X \geq 0, S^Y \geq 0, t \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Takto definovaný LP model je ekvivalentný SBM-AR modelu a môžeme ho realizovať jednoduchým spôsobom v prostredí Matlab - zdrojový kód uvádzame v prílohe A. V nasledujúcej kapitole demonštrujeme praktické použitie SBM-AR modelu.

3.8 Ilustračný príklad - hodnotenie katedier

Na záver kapitoly venovanej SBM modelu a jeho modifikáciám prinášame praktický príklad využitia DEA modelov a porovnanie výsledkov v konkrétnej situácii.

Príklad 3.9 (Matematické katedry) *Na našej fakulte svojho času pôsobilo osem matematických katedier. Chceme vyhodnotiť efektívnosť ich pedagogickej práce. Máme k dispozícii nasledujúce dáta: počet zamestnancov (učiteľov), počet vyučovaných hodín týždenne, počet odvedených diplomových prác, počet zapísaných skúšok a počet vedených doktorandov.*

Prvý údaj považujeme za vstup (pre fakultu predstavuje náklady, chceme ho minimalizovať) a ostatné za výstup (je to výsledok práce katedier, chceme dosiahnuť čo najvyššie hodnoty). Efektívnosť vypočítame pomocou troch modelov (CCR, SBM a SBM-AR) a porovnáme získané výsledky.

Konkrétne dáta, ktoré máme k dispozícii, zobrazuje tabuľka. Sú v nej uvedené aj vypočítané hodnoty efektívnosti. Nasleduje niekoľko poznámok k výpočtu a výsledkom.

Efektívnosť CCR sme vypočítali pomocou úlohy lin. programovania. V tomto modeli sa hľadajú optimálne váhy tak, aby efektívnosť bola čo najvyššia. Išlo o vstupne orientovaný model, takže v hodnote efektívnosti zohľadnil len vstupnú neefektívnosť. Ostatné druhy neefektívnosti (výstupnú, neefektívnosť z pomeru výstupov) nezohľadnil. Keďže sme použili pomerne veľký počet vstupov a výstupov (spolu 5) pre malý počet jednotiek DMU, dostali sme 5 efektívnych katedier.

Oproti tomu *SBM model* zohľadňuje všetky druhy neefektívnosti - aj tie, ktoré CCR nepostrehol. Preto CCR neefektívne jednotky majú v SBM ešte nižšiu hodnotu efektívnosti. Avšak CCR efektívne jednotky s kladnými váhami sú zároveň aj SBM efektívne, preto aj v SBM máme 5 efektívnych katedier.

V prípade *AR modelu* sme produkčnú množinu rozšírili tak, aby jej hranice spĺňali ohraničenia na váhy. Preto sa niektoré efektívne jednotky presunuli do neefektívnej oblasti - KG, KMA a KZDM. Tieto boli pri svojich optimálnych váhach efetívne, avšak po aplikácii obmedzení na váhy prestali byť efektívne.

Keďže máme iba jeden vstup, v prípade vstupov nebolo možné zvoliť obmedzenia na pomer váh. Váhy výstupov sme označili ako u_1 pre hodiny, u_2 pre diplomovky, u_3 pre skúšky a u_4 pre doktorandov.

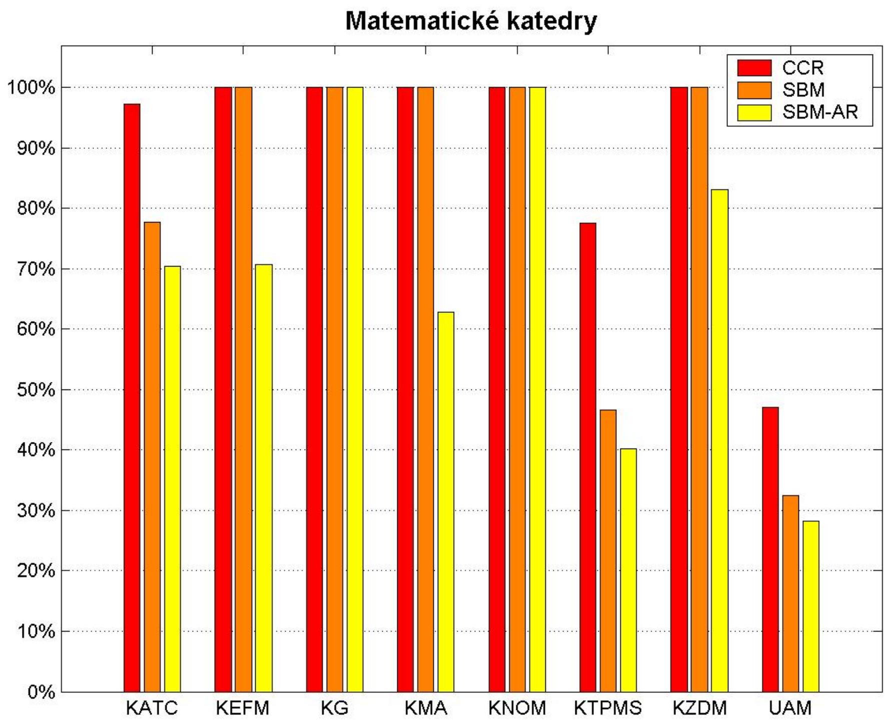
Katedra	Učitelia	Hodiny	Diplomovky	Skúšky	Doktorandi	CCR	SBM	SBM-AR
KATC	11.75	84	15	1183	13	0.97	0.78	0.70
KEFM	8	46	30	954	0	1	1	0.71
KG	13	129	19	1190	26	1	1	1
KMA	19.67	187	12	2174	8	1	1	0.63
KNOM	9	95	13	855	9	1	1	1
KTPMS	10.5	75	17	801	4	0.78	0.47	0.40
KZDM	11.5	83	29	708	19	1	1	0.83
UAM	11.25	51	10	362	4	0.47	0.33	0.28

Tabuľka 3.1: Matematické katedry - dáta a výsledky

$$\begin{array}{lcccl} 0{,}2 & \leq & u_2/u_1 & \leq & 2 \\ 0{,}01 & \leq & u_3/u_1 & \leq & 0{,}1 \\ 0{,}01 & \leq & u_3/u_2 & \leq & 0{,}1 \\ 0{,}2 & \leq & u_4/u_1 & \leq & 5 \\ 1 & \leq & u_4/u_2 & \leq & 5 \\ 10 & \leq & u_4/u_3 & \leq & 100 \end{array}$$

Treba poznamenajme, že voľbou iných obmedzení na váhy by katedry v SBM-AR modeli dosiahli iné hodnoty efektívnosti, resp. teraz efektívne by mohli neefektívne a naopak.

Hodnoty efektívností znázorňuje graf na obrázku 3.1.



Obr. 3.1: Grafické porovnanie efektivít katedier: CCR, SBM a SBM-AR

Všimnime si, že platí:

$$E^o_{CCR} \geq E^o_{SBM} \geq E^o_{SBM-AR}$$

Toto je dôsledkom vlastností modelov: SBM model zohľadňuje viac druhov neefektívnosti ako CCR. Model SBM-AR má rovnakú účelovú funkciu ako SBM, avšak jeho množina prípustných riešení je zmenšená ohraničením multiplikátorov. Preto sa v maximalizačnej úlohe dosahuje menšia (váhy nespĺňali nové ohraničenia) alebo rovnaká hodnota efektívnosti (váhy spĺňajú reštrikcie).

4 Hodnotenie kvality slovenských vysokých škôl

V tejto kapitole využijeme porovnávanie pomocou modelov DEA (najmä SBM a SBM-AR) v komplexnej praktickej situácii, akou nepochybne je hodnotenie efektívnosti a kvality fakúlt slovenských vysokých škôl.

Prvá časť ponúka pár slov o stave hodnotenia vysokých škôl na Slovensku. Nasleduje hlavná - aplikačná časť, v ktorej pomocou dostupných údajov a našich modelov vypočítame mieru efektívnosti a zhodnotíme kvalitu našich škôl. V závere získané výsledky zhrnieme a interpretujeme ich v kontexte s dostupným rankingom.

4.1 Súčasný stav

Na Slovensku nie je tradícia hodnotiť vysoké školy. Dlhodobo na to ani nebol dôvod. V minulosti sa vyskytlo niekoľko pokusov, tie sa zamerali len na školy istej skupiny (ekonomický či fyzikálny smer).

Isté posuny možno sledovať ostatné dva roky. Vznikla **ARRA** - *Akademická rankingová a ratingová agentúra*. Tá si dala za cieľ vytvoriť nezávislé hodnotenie kvality vzdelávania a výskumu na vysokých školách na Slovensku. Taktiež chce pravidelne zostavovať **ranking** - poradie vysokých škôl, príbuzných fakúlt a odborov podľa kvality poskytovaného vzdelávania a kvality výskumu a vývoja.

To aj robí. ARRA zatiaľ zverejnila dve správy (viď [1] a [2]), v ktorých zhodnotila verejné vysoké školy na Slovensku a ich fakulty. Práve pomocou dát, ktoré ARRA zhromaždila, hodnotíme kvalitu aj my v nasledujúcich častiach.

4.1.1 Metodika hodnotenia ARRA

Odborníci pre ARRA zostavili metodiku, na základe ktorej fakulty hodnotia. Ako však aj autori správy pripomínajú, samotné hodnotenie a ranking sú optikou zvolených kritérií a nemožno ich považovať za imperatívne dané; môžu byť len akýmsi vodítkom.

Podobne ako inde na svete, aj prístup ARRA sa spolieha na kvantitatívne údaje: tieto sú verejne dostupné a všeobecne ich možno považovať za spoľahlivé indikátory akademickej kvality (napríklad počet učiteľov na 100 študentov).

Ďalším kľúčovým bodom je rozdelenie fakúlt do skupín podľa prevažujúceho zamerania; vychádzajúc z Frascati manuálu autori zvolili šesť skupín: prírodné, technické, lekárske, pôdohospodárske, spoločenské a humanitné vedy. Navzájom tak porovnávame školy iba v rámci skupiny, v ktorých školy fungujú v spoločnom kontexte s rovnakými podmienkami.

Postup hodnotenia ARRA pozostával z niekoľkých krokov:

- **výber indikátorov** súvisiacich s kvalitou vzdelávania a výskumu fakúlt spomedzi verejne dostupných (objektívnych) údajov - použili 20 indikátorov rozdelených do piatich skupín (viď tabuľka nižšie a v prílohe), zvolené sú tak, aby vyššia hodnota bola lepšia (napr. namiesto *počet študentov na učiteľa* použijeme prevrátenú hodnotu *počet učiteľov na 100 študentov*, ktorú chceme maximalizovať)
- **rozdelenie fakúlt** do šiestich skupín - pri ďalšom hodnotení pracujú s každou skupinou samostatne
- priradenie **bodov za indikátory** každej fakulte za výkon v každom indikátore - hodnota indikátora sa lineárne preškáluje tak, aby najväčšia hodnota predstavovala 100 bodov a ostatné príslušnú časť podľa pomeru hodnoty indikátora k najväčšej hodnote
- priradenie bodov fakulte **v piatich ukazovateľoch** - každý vznikne ako priemer 3-5 indikátorov daného ukazovateľa
- **celkový bodový zisk** fakúlt sa vypočíta ako priemer piatich ukazovateľov
- výsledkom je **ranking fakúlt** v rámci skupiny usporiadaný podľa bodového zisku

Poznamenajme, že ARRA hodnotila aj vysoké školy ako istý priemer hodnotenia jednotlivých fakúlt - my sa však budeme zaoberať len hodnotením fakúlt. Využijeme pri tom tieto indikátory v jednotlivých skupinách - v tabuľke 4.1 uvádzame kritéria ARRA pre fakulty. Konkrétne údaje uvádzame v prílohe v tabuľke B.1.

4.1.2 Využitie DEA

Ako vyplýva z opísanej metodiky, pri hodnotení ARRA nepoužíva analýzu DEA. Vo väčšine prípadov vykoná jednoduchý priemer z dostupných čísel a s takýmto hodnotením ďalej pracuje.

Takýto prístup pochopiteľne vedie k iným výsledkom ako napríklad CCR model; jedná sa totiž o fixné váhy (1/počet hodnôt), kým napr. CCR model pre danú fakultu hľadá najvýhodnejšie váhy jednotlivých hodnôt. Preto ani výsledky nemožno očakávať rovnaké.

Pritom práve DEA ponúka možnosti na porovnávanie objektov v rámci skupiny, pokiaľ nemáme presnú informáciu o závislostiach medzi jednotlivými veličinami systému a prebiehajúcich procesoch. Využitie tohto prístupu v nevýrobnej sfére (napríklad výskume a pedagogickej práci vysokých škôl), pre ktorú je určený, by malo dávať optimálne výsledky.

4.2 Analýza ukazovateľov

V prvom priblížení sa pokúsime zhodnotiť vysoké školy na základe údajov o hodnotách piatich ukazovateľov. Vychádzajúc z údajov za rok 2006 (správy ARRA [2]), máme k dispozícii 5 údajov, hovoriacich o kvalite školy, ktoré sa snažíme maximalizovať. Tieto budeme v modeloch hodnotiť ako výstupy. Zvolíme jednotkový vstup - 1 pre všetky útvary v skupine. Ako príklad uvádzame dáta prírodovedných fakúlt v tabuľke 4.2.

Na tieto údaje (rovnako aj ostatné skupiny fakúlt) postupne použijeme model CCR, model SBM a na záver SBM-AR.

Kategória	Ukazovateľ	Indikátor
Štúdium a vzdelávanie	1. Učitelia a študenti	uč/100 št. P+D/100š PhD/učit P+D/učit vek prof.
	2. Záujem o štúdium	prihl/plan zapís/prij 100(zahršt/štud)
Veda a výskum	3. Publikácie a citácie	pub/tvor.p SCI/tvor.p SCI/pub 5cit/tvor.p 25cit/tvorp
	4. Doktorandské štúdium	dokt.i/P+D dokt/P+D absdok/P+D dokt/štud
	5. Grantová úspešnosť	granty/tvp VG+KG/tvp APVT/tvp

Tabuľka 4.1: Kritéria ARRA pre fakulty

4.2.1 Voľba váh pre SBM-AR

V treťom modeli potrebujeme určiť ohraničenia váh. Tieto určíme podľa "optimálnych" váh (stanovených niekoľkými odborníkmi), pričom zoberieme do úvahy maximálny a minimálny pomer príslušných ukazovateľov. Ako príklad uvádzame výpočet týchto váh - vychádzame z váh odborníkov podľa tabuľky 4.3.

Pre každú dvojicu váh vypočítame najväčší a najmenší pomer. Napríklad pomer váh

$$\frac{< \text{Záujem} >}{< \text{Učit a štud} >}$$

nadobúda hodnotu 0,5 v prvom prípade, 1 v druhom a 0,5 v treťom: tento pomer váh zdola ohraničíme minimom 0,5 a zhora maximom 1. Vypočítané ohraničenia uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

Rovnakým spôsobom budeme voliť ohraničenia multiplikátorov aj v ďalších situáciách.

4.2.2 Priebeh výpočtu a výsledky

Potrebné výpočty sme realizovali v programe Matlab. Zdrojové kódy použitých programov uvádzame v prílohe C. Numericky výpočty prebehli bez problémov.

Experimentovali sme aj s použitím globálneho výpočtu efektívnosti (vzhľadom na fakulty všetkých skupín), tieto z pochopiteľných príčin dávali nižšie hodnoty efektívnosti (vzhľadom na viac ohraničení). V niektorých skupinách však vracali príliš nízke hodnoty a neboli prakticky použiteľné. Preto sme sa vrátili k vyhodnocovaniu iba v rámci skupín podľa zamerania fakúlt.

Ukazovateľ Fakulta	Jednotkový *Vstup*	Učit a štud *Výstup*	Záujem *Výstup*	Publ a cit *Výstup*	Dokt št *Výstup*	Granty *Výstup*
FMFI UK	1	96	62	97	81	77
Prír UK	1	83	87	53	94	88
Prír UPJŠ	1	89	61	62	60	56
Prír UKF	1	60	78	11	73	28
Ekolenv TUZ	1	70	69	9	66	17
Prír UMB	1	53	51	13	41	13
Prír UCM	1	68	37	8	0	7
Prír ŽU	1	50	66	1	17	6

Tabuľka 4.2: Dáta prírodovedných fakúlt

Ukazovateľ	Učit a štud	Záujem	Publ a citácie	Doktorandské	Granty	Súčet
Odborník 1	20	10	30	30	10	= 100
Odborník 2	20	20	39	1	20	= 100
Odborník 3	20	10	30	20	20	= 100

Tabuľka 4.3: Váhy kritérií podľa odborníkov

Výsledky sú prehľadne usporiadané v tabuľkách prílohy C - rozdelené podľa jednotlivých skupín (aj všetky výpočty a porovnania boli takto vyhodnocované) - viď tabuľky C.1 až C.6. Najskôr uvádzame hodnoty ukazovateľov podľa ARRA a ARRA rating (priemer hodnôt ukazovateľov), potom vypočítané hodnoty efektívnosti podľa CCR, SBM a SBM-AR modelu (všetky tieto sú pre lepšiu orientáciu násobené 100). V posledných stĺpcoch je ranking - poradie podľa príslušného kritéria.

Výsledky môžeme zhrnúť nasledovne: CCR efektívnosť vrátila vyššie hodnoty (pomocou optimálnych váh) ako fixné váhy ARRA, čo niektorým fakultám pomohlo k lepšiemu výsledku. SBM vykonalo istú korekciu hodnotenia fakúlt, ktoré mali nízke hodnoty niektorých výstupov a boli ďaleko od fiktívnej efektívnej jednotky. Model SBM-AR ešte ubral z efektívnosti fakultám, ktoré používali váhy mimo prípustnej oblasti.

Rating sa tak rozdelil vcelku rovnomerne a umožnil zostaviť rebríček fakúlt. Napríklad pri prírodných vedách je (okrem jednej výmeny medzi 7. a 8. miestom) výsledný SBM-AR ranking rovnaký ako ARRA. V prípade technických vied však už došlo k viacerým výrazným posunom oboma smermi.

4.3 Dvojfázové hodnotenie a spracovanie indikátorov

Druhá aplikácia DEA je zložitejšia ako predchádzajúca. V nej chceme rating vypočítať priamo z absolútnych čísel jednotlivých pomerových indikátorov. Pracujeme v dvoch fázach. V prvej fáze pre každú skupinu 3-5 indikátorov samostatnou DEA analýzou vypočítame efektívnosť fakulty v danom ukazovateli. Druhá fáza bude rovnaká ako v predchádzajúcej stati - z hodnôt piatich ukazovateľov vypočítame celkovú efektívnosť každej fakulty. Avšak namiesto ARRA údajov o ukazovateľoch použijeme údaje, ktoré vypočítame v prvej fáze.

Pre skupinu škôl prírodných vied v prílohe uvádzame všetky vstupné údaje aj priebežné tabuľky niekoľkých spôsobov výpočtu. V závere prílohy uvádzame výslednú tabuľku (hodnoty

Ukazovateľ A / Ukazovateľ B			Min. pomer u_A/u_B	Max. pomer u_A/u_B
Záujem	/	Učit a štud	0,5	1
Publ a citácie	/	Učit a štud	1,5	1,95
Doktorandské	/	Učit a štud	0,05	1,5
Granty	/	Učit a štud	0,5	1
Publ a citácie	/	Záujem	1,95	3
Doktorandské	/	Záujem	0,05	3
Granty	/	Záujem	1	2
Doktorandské	/	Publ a citácie	0,03	1
Granty	/	Publ a citácie	0,33	0,67
Granty	/	Doktorandské	0,33	20

Tabuľka 4.4: Použité ohraničenia multiplikátorov pri pri hodnotení SBM-AR

ukazovateľov z prvej fázy) pre každú zo skupín škôl. Pritom na základe odvodenej teórie za najvýpovednejší považujeme SBM-AR rating a ranking, ktorý porovnávame s ARRA rankingom fakúlt.

4.3.1 Prvá fáza - spracovanie indikátorov

Už sme v úvode naznačili, že v prvej fáze analýzy sa pokúsime spracovať jednotlivé indikátory. Rozhodli sme sa pracovať so všetkými údajmi, ktoré vybrala ARRA - všetky indikátory v rámci piatich skupín ukazovateľov s jednou výnimkou.

Kritérium *vek profesorov* (resp. jeho prevrátenú hodnotu), ktorú ARRA použila, považujeme za číslo nedostatočne hovoriace o kvalite školy. Navyše nie je celkom jasné, či nižšia hodnota priemerného veku profesorov hovorí o ich vyššej kvalite. Fakulta by v ideálnom prípade mala mať vekovú štruktúru profesorov približne rovnomerne rozdelenú, aby sa zabezpečila kontinuita vo výskume aj pedagogickej práci. Preto tento indikátor vynechávame a ďalej s ním nepracujeme.

Pracujeme s 19 číselnými indikátormi (viď príloha - tabuľka B.1) v piatich skupinách vytvárajúcich ukazovatele. Konkrétne dáta (a ďalšie priebežné údaje) uvádzame v prílohe D - vstupné údaje v tabuľkách D.1 a D.2. Podobne ako v predchádzajúcej časti, aj tu sme zvolili ohraničenia váh pomocou "optimálnych váh" určených odborníkmi (uvádzame ich v tabuľke D.3 - tieto ohraničenia sa týkajú všetkých skupín fakúlt). Váhy sme volili v každej skupine zvlášť. Ohraničenia sme využili iba v SBM-AR modeli, ostatné výpočty efektívnosti boli voľné. Použité ohraničenia uvádzame v prílohe.

Postupovali sme nasledovne - každú skupinu indikátorov sme hodnotili samostatne. Na indikátory v skupine sme hľadeli ako na výstupy a riešili sme úlohu lineárneho programovania na výpočet efektívnosti v modeloch CCR, SBM aj SBM-AR.

Opäť sme otestovali aj výpočet globálnych efektívností (zahŕňajúc všetkých 93 fakúlt) v jednotlivých ukazovateľoch. Tieto však neboli dostatočne výpovedné, keďže v niektorých oblastiach sa napr. rádovo viac publikuje ako v iných, takže kým v jednej skupine mali fakulty za daný ukazovateľ 50 - 100 bodov, v inej skupine do bolo najviac 5 bodov. (Efektívnosť uvažujeme v bodoch - rozumieme tým percentuálne body miery efektívnosti, resp. 100-násobok miery efektívnosti.)

Opäť sa nám potvrdila zmysluplnosť rozdelenia fakúlt do šiestich skupín a ich úplne samostatného hodnotenia. To znamená, že 100 bodov za ukazovateľ záujem o štúdium môže napr. v prípade prírodných vied a v prípade humanitných vied znamenať úplne iný záujem. Aj preto je rating medzi zameraniami neporovnateľný.

Poznamenajme, že vypočítané efektívnosti ako riešenia úloh lineárneho programovania boli desatinné čísla (s výnimkou efektívnych jednotiek). Tieto sme kvôli numerickej stabilite a dobrej podmienenosti ďalších výpočtov zaokrúhlili na dve desatinné miesta, resp. na celé číslo v škále 0 až 100 percentuálnych bodov.

Vypočítané hodnoty ukazovateľov spĺňali známu nerovnosť

$$E^o_{CCR} \geq E^o_{SBM} \geq E^o_{SBM-AR},$$

navyše platí aj

$$E^o_{ARRA} \leq E^o_{CCR},$$

keďže ARRA zvolila fixné (jednotkové) a nie CCR optimálne váhy. Každým ďalším (vyšším) modelom sa čoraz väčšia časť neefektivity fakúlt. Podrobnejšie údaje uvádzame v tabuľke D.4 a graficky na obrázku D.1.

Tieto vlastnosti sa na výsledkoch prejavili paradoxne práve veľkým rozptylom. Ten bol malý pri CCR, väčší pri SBM a najväčší pri SBM-AR. Kým CCR bolo ešte pomerne rovnomerne rozdelené, výsledky SBM-AR sa vyznačili veľkou citlivosťou na outlierov - jedna fakulta mala hodnotu ukazovateľa 100, ďalšia jedna-dve mali nad 10 a zvyšné fakulty mali menej ako 10, niekedy dokonca menej ako 3 body. Tento fakt je viditeľný hlavne pri ukazovateli Publikácie a citácie.

Práve nerovnomerné rozdelenie hodnoty ukazovateľov môže viesť k celkovo nepresným výsledkom, keďže najväčšia úspešnosť v jednom ukazovateli dáva fakulte značnú výhodu, kým ostatné fakulty (ktoré nevynikajú v žiadnej oblasti) majú vďaka nízkym číslam pomerne veľkú stratu. Slabšie fakulty (okrem skupinky menej ako 5 outlierov) sa celkovým bodovým ziskom držia veľmi tesne pri sebe.

Ďalším problémom môže byť, že pri stanovovaní váh (ohraničení multiplikátorov) sme nezohľadnili, že niektoré ukazovatele (napr. *počet profesorov a docentov z celkového počtu učiteľov*) majú prirodzene inú veľkosť číselných hodnôt ako iné ukazovatele (*výška grantových prostriedkov na tvorivého pracovníka*). Toto sa prejavuje hlavne pri jednotkových váhach (a blízkych jednotkovým, ako sú aj naše určené ohraničeniami). Pre jednoduchosť však predpokladajme, že odborníci pri voľbe optimálnych váh zohľadnili rôznu veľkosť "bežných" čísel jednotlivých ukazovateľov.

4.3.2 Druhá fáza - efektívnosť z ukazovateľov

Z prvej fázy máme k dispozícii pre každú fakultu päticu čísel - ohodnotení 0 až 100 bodov v ukazovateľoch Študenti a učitelia, Záujem o štúdium, Publikácie a citácie, Doktorandské štúdium a Grantová úspešnosť. Túto päticu spracujeme niekoľkými spôsobmi: najskôr vypočítame jednoduchý priemer (spôsob ako v ARRA), potom efektívnosť podľa CCR, SBM a SBM-AR modelu.

V skutočnosti máme dve sady čísel - ponechali sme si výstupnú päticu z SBM a aj z SBM-AR modelu. V prípade prírodovedných fakúlt uvádzame v prílohe pre porovnanie obe výsledné tabuľky. Rôzny výpočet neovplyvnil zloženie prvej trojky fakúlt, dve si vymenili miesto.

V spodnej časti rebríčka však majú konečný SBM-AR rating nižší ako 15 všetky ostatné fakulty, takže došlo k malým korekciám. Rating má malé čísla v prípade slabších fakúlt v oboch prípadoch - toto nepovažujeme za problém, dajme teda prednosť výpočtu hodnoty ukazovateľov v prvej fáze podľa SBM-AR, pri ktorom sa zohľadnia naše požiadavky na váhy a menej fakúlt vyhodnotíme ako efektívnych (teda aj medzi fakultami blízkymi efektívnym budeme vedieť vybrať lepšiu).

Druhá fáza pozostáva z výpočtu efektívnosti podobne ako v prvom prístupe, kde sme počítali efektívnosť z dostupných piatich ukazovateľov. Opäť využijeme Matlab a programy pre jednotlivé DEA modely. Numerické problémy úloh sme obišli zaokrúhlením vstupných čísel na celé čísla z intervalu $[0, 100]$.

Za najvhodnejší pre naše účely považujeme výstup z SBM-AR modelu. Tento môžeme považovať za rating fakúlt určený z objektívnych čísel na základe DEA analýzy. Takto sme získali vlastný rebríček fakúlt verejných vysokých škôl, čo bol náš cieľ.

4.3.3 Zhodnotenie výsledkov

Výsledky nášho hodnotenia uvádzame v prílohe. Celkové vyhodnotenie v tabuľke D.5 - pri týchto údajoch sme v prvej fáze použili model s ohraničenými multiplikátormi SBM-AR a tabuľke D.6 - pri týchto sme použili model SBM v prvej fáze. Poznamenajme, že výsledky sú hlavne odrazom použitého spôsobu hodnotenia. Môžeme ich však porovnať s výsledkami hodnotenia a rebríčkom podľa ARRA.

Napríklad si môžeme všimnúť, že v skupinách s menším počtom fakúlt (prírodné vedy, poľnohospodárstvo, medicína) sú fakulty polarizované na pomerne rozdielnej úrovni. Toto postrehla rovnako ARRA ako naše hodnotenie. Preto v konečnom poradí badať len malé posuny a výmeny miest.

Oproti tomu skupiny s väčším počtom fakúlt nie je také jednoduché rozdeliť na lepšie a horšie. Zrejme sú pomerne rovnomerne rozdelené. Tieto rozdiely je ťažšie postrehnúť a dajú sa rôzne vážiť, preto sú tu skoky v hodnotení aj o desať miest. Trend je však veľmi podobný, prvé a posledné miesta sú zväčša rovnaké v oboch hodnoteniach.

Tiež sme si všimli, že v niektorých skupinách (spoločenské a humanitné vedy) sú zaradené pomerne rôznorodé fakulty, nie je celkom jasné, či ich možno navzájom porovnávať. Predpokladáme však, že tento problém ARRA úspešne zvládla v podobe stanovených skupín fakúlt.

Zdá sa, že v DEA hodnotení (najmä CCR) majú výrazne navrch fakulty, ktoré majú (aspoň) jednu excelentnú stránku (môže to byť stránka, na ktorú sa zvlášť zameriavajú), ostatné stránky nie sú rozhodujúce (majú malú až takmer nulovú váhu). Toto sčasti riešia obmedzené multiplikátory, ktoré požadujú od všetkých stránok aspoň istú časť maximálneho výkonu. Pri porovnávaní priemerov sa berú do úvahy výsledky všetkých ukazovateľov a indikátorov a každý má rovnakú váhu, preto ani nemožno očakávať rovnaké výsledky.

Je na nás, či chceme porovnávať fakulty a brať do úvahy špecifiká a orientáciu fakúlt, alebo je podľa nás najlepšia fakulta, ktorá sa rovnomerne stará o všetky porovnávacie kritériá. Podľa toho zvolíme buď niektorý z modelov DEA alebo iný prístup (fixné váhy ako ARRA).

4.4 Záverečné poznámky

V tejto kapitole sme vybudovali vlastnú metodiku hodnotenia fakúlt, založenú na modeloch *Data Envelopment Analysis* a hodnotení fakúlt *Akademickou rankingovou a ratingovou agentúrou.* Prístup DEA aj ARRA má svoje teoretické opodstatnenie. O našej metodike a vhodnosti aplikácie DEA možno diskutovať. Opäť pripomeňme, že každý ranking je len optikou svojho spôsobu hodnotenia.

Nášmu postupu možno všeličo vyčítať. Napríklad:

- Použili sme pomerové dáta a nie absolútne čísla ako vstupy a výstupy. Absolútne čísla sme nemali k dispozícii. Navyše niektoré dáta (napr. počet učiteľov) možno považovať za vstupy, keď ich chceme maximalizovať (pri výstupe *počet publikácii*), ale aj za výstupy (*počet učiteľov pripadajúcich na 100 študentov*).

- Absencia relevantných vstupov a výstupov. Nezohľadnili sme faktory ako uplatnenie absolventov fakúlt v bežnom živote, kvalitu pedagogickej práce, náročnosť štúdia, atď. Možno vymenovať množstvo faktorov, ktoré sa dajú považovať za relevantné. Navyše nie všetky môžno rozumne a objektívne odmerať. Model však predstavuje zjednodušený obraz sveta (dostatočne jednoduchý, aby sme vedeli niečo vypočítať), preto musíme niektoré efekty abstrahovať.

- Rôzne ohraničenia v skupinách fakúlt. Jednotlivé fakulty v rôznych skupinách sa zameriavajú na rozličné veci - niektoré individuálnejší prístup ku študentom, iné kvalitu výskumu. Tieto špecifiká by bolo vhodné zohľadniť pri stanovovaní ohraničení mutliplikátorov - tieto môžu byť v skupinách rozličné.

- Invariantnosť na zmenu jednotiek. Od modelu SBM-AR očakávame invariantnosť na zmenu jednotiek - avšak práve ohraničenia váh určené odborníkmi v kombinácii s rozličnými veľkosťami jednotlivých indikátorov invariantnosť nezaručujú. My sme predpokladali, že vo váhach je už rozličná veľkosť vstupných čísel zohľadnená. Normalizáciou údajov však možno príjdeme k lepším výsledkom.

- Efektívnosť versus kvalita. DEA meria efektívnosť, kým nás zaujíma hodnotenie kvality. Nie je celkom presné stotožnovať tieto dva pojmy. Môže byť medzi nimi podstatný rozdiel. Pretože aj napriek nízkemu počtu učiteľov a malému počtu publikácii môže byť štúdium na škole kvalitnejšie a dať žiakovi viac. To sa z dostupných údajov nedá vyhodnotiť, toto je však rovnako problém metodiky ARRA.

- A ďalšie.

Napriek týmto a ďalším problémom si však myslíme, že svoj cieľ - využiť SBM model pri hodnotení fakúlt - sme úspešne splnili. Pripomienky a poznámky, čo treba dokončiť, azda v budúcnosti poslúžia niekomu ďalšiemu, kto sa bude chcieť problematike rankingu vysokých škôl venovať.

Záver

Ťažisko bakalárskej práce - *Data Envelopment Analysis* - ponúka široké spektrum možností ako hodnotiť efektívnosť útvarov v rámci danej skupiny. V našej práci sme prešli postupne od základných modelov CCR a BCC cez zložitejšie Assurance Region či aditívne modely k modelu SBM, založenom na meraní veľkosti rezerv (slackov). Zostrojili sme nový - kombinovaný, tzv. *Slacks-Based Measure in Assurance Region (SBM-AR) model*.

Ako sme naznačili už v úvode, cieľom tejto práce bolo preskúmať rôzne možnosti merania efektívnosti a bližšie sa zamerať práve na SBM model. Ten sme predstavili na širokom priestore, venovali sme sa aj jeho rôznym modifikáciám: duálnemu SBM, váhovému W-SBM, pre záporné hodnoty modifikovanému M-SBM, ako aj novovzniknutému SBM-AR.

Ďalšou úlohou bolo v praktických aplikáciách preveriť SBM a z neho odvodený SBM-AR model. Neopomenuli sme ani tieto, popri drobných ilustračných príkladoch sme zaradili aj komplexný DEA problém.

Kľúčovou časťou práce je práve štvrtá kapitola. V nej sme zúročili teoretické výsledky do odmerania efektívnosti v praktickej situácii - zhodnotili sme fakulty verejných vysokých škôl na Slovensku a zostavili podľa nich ranking, náš vlastný rebríček vysokých škôl.

Možných rozšírení tejto práce je viac. Po teoretickej stránke sa dajú bližšie popísať a rigoróznejšie odvodiť niektoré vlastnosti SBM či nového SBM-AR modelu. V praktickej časti ratingu vysokých škôl sa možno dá viac zamerať na získanie ďalších údajov a výber skutočne relevantných vstupov a výstupov do DEA analýzy alebo rozlíšiť použité ohraničenia v jednotlivých skupinách fakúlt. Oboje však vyžaduje oveľa širší priestor, než ponúka táto práca.

Literatúra

[1] ARRA - kolektív autorov: *Správa - Hodnotenie verejných vysokých škôl a ich fakúlt*, ARRA, 2005.

Dostupné na internete: *http://www.arra.sk/oldweb/ARRA-Sprava2005-SK.pdf*, 20.1.2007.

[2] ARRA - kolektív autorov: *Správa 2006 - Hodnotenie verejných vysokých škôl a ich fakúlt*, ARRA, 2006.

Dostupné na internete: *http://www.arra.sk/oldweb/ARRA-Sprava_o_VS-2006.pdf*, 21.1.2007.

[3] Banxia Frontier Analyst: *Data envelopment analysis: a glossary of terms.*

Dostupné na internete: *http://www.banxia.com/frontier/glossary.html*, 11.3.2007.

[4] Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K.: *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[5] Gotob M., Tsutsuia M.: *Multi-division efficiency evaluation of the US electric power companies: An application of the Weighted Slacks-Based Measure*, GRIPS Research Papers/Reports, No. I-2006-0006, 2006.

Dostupné na internete: *http://www3.grips.ac.jp/ pinc/pdf/I-2006-0006.pdf*, 16.3.2007.

[6] Halická M.: *DEA modely*, Seminár, 2006/2007.

[7] Némethová A.: *DEA modely a meranie efektívnosti*, Diplomová práca, FMFI UK, 2001.

Dostupné na internete: *http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2001/nemethova/index.html*, 9.12.2006.

[8] Sharp J.A., Liu W.B., Wu Z.: *Data Envelopment Analysis with Natural Negative Outputs and Inputs*, Canterbury Business School, Working Paper No. 48 (December 2003)

Dostupné na internete: *http://www.kent.ac.uk/kbs/pdf/John-Sharp-No-48.pdf*, 9.2.2007.

[9] Sharp J., Meng W., Liu S.: *A Modified Slacks Based Measure Model for Data Envelopment Analysis with Natural Negative Outputs and Inputs*, Kent Business School, Working Paper No. 84 (Máj 2005)

Dostupné na internete: *http://www.kent.ac.uk/kbs/pdf/Sharp-Liu-and-Meng-No-84.pdf*, 11.2.2007.

[10] Ševčovič D., Halická M., Brunovský P.: *DEA analysis for a large structured bank branch network*, Central Euro. J. of Operational Res. 9 (2001), 329-342.

Dostupné na internete: *http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/papers/cl19.pdf*, 24.11.2006.

Prílohy

A. Zdrojové kódy programov pre Matlab

Program pre CCR model - ccr.m

```
function efektivita  = ccr( vstupy, vystupy, o )
%%% CCR (Charnes, Cooper, Rhodes) Model
%%% pre zadany utvar "o" a vstupy a vystupy vsetkych jednotiek
%%% vypocita mieru efektivnosti daneho utvaru

x = vstupy; y = vystupy;

xo = x(o,:); yo = y(o,:);

n = size(x,1); %pocet jednotiek
m = size(x,2); %pocet vstupov
s = size(y,2); %pocet vystupov

f = -[zeros(1,m) yo];

A = [-x y];
b = zeros(1,n);

lb = zeros(m+s,1);

Aeq = [xo zeros(1,s)];
beq = ones(size(Aeq,1),1);

[optlin,fval,exitflag,lpoutput] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb);
efektivita= -fval;
```

Program pre SBM model - sbm.m

```
function efektivita   = sbm( vstupy, vystupy, o )
%%% SBM (Slacks-Based Measure) Model
%%% pre zadany utvar "o" a vstupy a vystupy vsetkych jednotiek
%%% vypocita mieru efektivnosti daneho utvaru
```

```
x = vstupy; y = vystupy;

xo = x(o,:); yo = y(o,:);

n = size(x,1); %pocet jednotiek
m = size(x,2); %pocet vstupov
s = size(y,2); %pocet vystupov


exs = (-1/m)*ones(1,m)./xo;
exs(exs==Inf) = 0;  %odstranime nulove veci
f = [1 zeros(1,n) exs zeros(1,s) ];

yoo = yo;
yoo(yo<=0) = 2; %penalta pre nekladny vystup
exs = (+1/s)*ones(1,s)./yoo;
normaliz = [1 zeros(1,n) zeros(1,m) exs ];

%Ax - xoi
Ax = [-xo' x' eye(m) zeros(m,s)];
%Ay - yoi
Ay = [-yo' y' zeros(s,m) -eye(s) ];

Aeq = [normaliz; Ax ; Ay];

beq = [1 zeros(1, m+s)];

lb = zeros(1, 1+n+m+s);

[optlin,efektivita,exitflag,lpoutput] = linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb);

t = optlin(1);
```

Program pre SBM-AR model - sbm_ar.m

```
function efektivita = sbm_ar( vstupy, vystupy, o, ohr_vstup, ohr_vystup )
%%% Slacks-Based Measure in Assurance Region model (SBM-AR)
%%% pre zadany utvar "o" a vstupy a vystupy vsetkych jednotiek
%%% vypocita mieru efektivnosti daneho utvaru
%%% zohladnuje aj matice P, Q ako rozsirenie produkcnej mnoziny

x = vstupy; y = vystupy;
P = ohr_vstup; Q = ohr_vystup;
xo = x(o,:); yo = y(o,:);

n = size(x,1); %pocet jednotiek
```

```
m = size(x,2); %pocet vstupov
s = size(y,2); %pocet vystupov

p = size(P,2); %pocet ohraniceni vah vstupu
q = size(Q,2); %pocet ohraniceni vah vystupu

exs = (-1/m)*ones(1,m)./xo;
exs(exs==Inf) = 0;  %odstranime nulove veci
f = [1 zeros(1,n) exs zeros(1,s) zeros(1,p+q)];

yoo = yo;
yoo(yo<=0) = 2; %penalta pre nekladny vystup
exs = (+1/s)*ones(1,s)./yoo;
normaliz = [1 zeros(1,n) zeros(1,m) exs zeros(1,p+q)];

%Ax - xoi
Ax = [-xo' x' eye(m) zeros(m,s) -P zeros(m,q)];
%Ay - yoi
Ay = [-yo' y' zeros(s,m) -eye(s) zeros(s,p) Q];

Aeq = [normaliz; Ax ; Ay]; %pod seba dva druhy udajov

beq = [1 zeros(1, m+s)];

lb = zeros(1, 1+n+m+s+p+q);

[optlin,efektivita,exitflag,lpoutput] = linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb);

if(exitflag<=0)
    %problem
    efektivita = -1;
end;
```

Generovanie P, Q matíc pre AR - RatioMatrix.m

```
function [ matrix ] = RatioMatrix( ohranicenia, dlzka )
% RATIOMATRIX - generuje matice v tvare potrebnom pre AR model
% ocakava vstup v tvare matice s riadkami
%
%   [1   3   0.25     7]       pre 0.25 <= u1/u3 <= 7
%   [2   4   -Inf     2]       pre         u2/u4 <= 2

out = [];
pocet = size(ohranicenia,1);

for k=1:pocet
```

```
    oh = ohranicenia(k,:);

    i = oh(1,1);
    j = oh(1,2);
    dlzka;

    if(i>dlzka || j>dlzka) error('Index presiahol dimenziu vektora.'); end;
    L = oh(1,3); %lower
    U = oh(1,4); %upper


    if(L>-Inf)
        line = zeros(1,dlzka);
        line(1,i) = L;
        line(1,j) = -1;
        out = [out; line];
    end;

    if(U<Inf)
        line = zeros(1,dlzka);
        line(1,i) = -U;
        line(1,j) = 1;
        out = [out; line];
    end;

end;
matrix = out';
```

Príklad použitia programov - katedry.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% sada dat katedry %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
data = [11.75 84    15  1183    13;
8   46  30  954 0;
13 129  19  1190    26;
19.67 187   12  2174    8;
9   95  13  855 9;
10.5 75 17  801 4;
11.5    83  29  708 19;
11.25  51   10  362 4]

%%% zvolime si ohranicenia
ohranicenia = [
1 2  0.2 5
1 3  0.01 0.1
1 4  0.2 5
2 3  0.01 0.1
```

```
2 4  0.2 5
3 4  0.2 5
];

pocet = 4;
P = []
Q = RatioMatrix( ohranicenia, pocet )

input = [1];               %vyber stlpcov vstupu
vstup = data(:,[input]);   %data vstup

output = [2 3 4 5 ];       %vyber stlpcov vstupu
vystup = data(:,[output]); %data vystup

names = 1:size(vstup, 1);  %nazvy jednotiek

ef_sbm = []; ef_ccr = []; ef_sbmar = [];

n = size(vstup,1);         %pocet jednotiek

for j=1:n
 %cyklus pre vsetky jednotky
 disp(names(j))

 efektivita  = sbm( vstup, vystup, j );
 ef_sbm(j) = efektivita;

 efektivita = ccr( vstup, vystup, j );
 ef_ccr(j) = efektivita;

 efektivita = sbm_ar( vstup, vystup, j, P, Q );
 ef_sbmar(j) = efektivita;
end;

[names' ef_ccr' ef_sbm' ef_sbmar']  %zobrazime vysledky

bar([ef_ccr' ef_sbm' ef_sbmar'])  %stlpcovy graf s vysledkami
colormap autumn;
```

B. Prehľad indikátorov v hodnotení ARRA

Ukazovateľ	**Označenie**	**Indikátor**
Publikácie a citácie	pub/tvor.p	Počet publikácii na tvorivého pracovníka
	SCI/tvor.p	Počet citácii na tvorivého pracovníka
	SCI/pub	Počet citácií na jednu publikáciu
	5cit/tvor.p	Počet publikácií s aspoň 5 citáciami na tvorivého pracovníka
	25cit/tvorp	Počet publikácií s aspoň 25 citáciami na tvorivého pracovníka
Doktorandské štúdium	dokt.i/P+D	Počet denných doktorandov na jedného profesora alebo docenta
	dokt/P+D	Počet všetkých doktorandov na jedného profesora alebo docenta
	absdok/P+D	Počet absolventov doktorandského štúdia na jedného profesora alebo docenta
	dokt/štud	Počet doktorandov ku počtu študentov magisterského a bakalárskeho štúdia
Grantová úspešnosť	granty/tvp	Grantové prostriedky na tvorivého pracovníka
	VG+KG/tvp	Granty KEGA, VEGA na tvorivého pracovníka
	APVT/tvp	Granty APVT na tvorivého pracovníka
Študenti a učitelia	uč/100 št.	Počet všetkých študentov na jedného učiteľa
	P+D/100š	Počet všetkých študentov na jedného profesora alebo docenta
	PhD/učit	Pomer profesorov, docentov a ostatných s PhD ku všetkým učiteľom
	P+D/učit	Pomer profesorov a docentov ku všetkým učiteľom
	vek prof.	Priemerný vek funkčných profesorov
Záujem o štúdium	prihl/plan	Podiel prihlásených uchádzačov k plánovanému počtu miest
	zapís/prij	Pomer zapísaných a prijatých študentov
	100(zahršt/štud)	Podiel zahraničných študentov

Tabuľka B.1: Prehľad použitých údajov pri hodnotení

C. Výsledky fakúlt podľa ukazovateľov - Tabuľky

Prírodné vedy

Fakulta	Ukazovatele ARRA					Hodnotenie - Rating				Poradie - Ranking			
	Učit Štud	Záujem	Publ Cit	Dokt	Granty	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR
FMFI UK	96	62	97	81	77	83	100	100	100	1	1	1	1
Prír UK	83	87	53	94	88	81	100	100	92	2	1	1	2
Prír UPJŠ	89	61	62	60	56	66	94	78	72	3	3	3	3
Prír UKF	60	78	11	73	28	50	90	39	32	4	4	4	4
Ekolenv TUZ	70	69	9	66	17	46	83	28	25	5	5	5	5
Prír UMB	53	51	13	41	13	34	62	27	21	6	8	6	6
Prír UCM	68	37	8	0	7	24	71	7	4	8	7	7	7
Prír ŽU	50	66	1	17	6	28	76	5	3	7	6	8	8

Tabuľka C.1: Výsledky podľa ukazovateľov - Prírodné vedy

Pôdohospodárske vedy

Fakulta	Ukazovatele ARRA					Hodnotenie - Rating				Poradie - Ranking			
	Učit Štud	Záujem	Publ Cit	Dokt	Granty	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR
VeterLek. UVL	94	88	85	61	81	82	100	100	100	1	1	1	1
BiotPotr. SPU	66	56	76	49	65	62	89	76	72	2	5	3	2
Les TUZV	79	49	54	61	42	57	93	67	60	3	4	4	3
Agro SPU	67	54	12	59	77	54	96	41	38	4	3	5	4
Drev TUZV	65	63	8	65	36	47	89	34	26	6	6	6	5
Záhrad SPU	55	69	4	83	43	51	100	100	16	5	1	1	6

Tabuľka C.2: Výsledky podľa ukazovateľov - Pôdohospodárske vedy

Technické vedy

Fakulta	Ukazovatele ARRA					Hodnotenie - Rating				Poradie - Ranking			
	Učit Štud	Záujem	Publ Cit	Dokt	Granty	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR
Chem STUBA	99	48	100	82	84	83	100	100	100	1	1	1	1
Elektr STUBA	78	57	38	51	82	61	100	100	63	2	1	1	2
Stroj STUBA	72	57	19	44	41	47	88	56	43	6	5	4	3
Hutn TUKE	76	35	19	69	43	48	84	45	42	3	7	7	4
Stav STUBA	68	37	20	44	37	41	72	42	40	9	14	8	5
PriemTech TUAD	64	31	27	46	47	43	65	48	38	8	19	6	6
Berg TUKE	59	58	15	67	31	46	99	51	37	7	4	5	7
Elektr TUKE	69	44	12	44	30	40	77	32	31	10	11	9	8
Stav TUKE	72	47	12	36	26	39	81	31	29	13	8	10	9
Riadenia a Inf ŽU	52	36	6	46	21	32	64	19	17	18	20	11	10
MatTechn STUBA	58	38	6	30	20	30	65	19	17	20	18	12	11
Stroj TUKE	60	35	5	53	41	39	68	19	15	12	17	13	12
Stroj ŽU	71	29	4	71	59	47	87	16	14	5	6	14	13
Elektr ŽU	68	45	4	39	19	35	77	15	13	15	10	15	14
VýrTech TUKE	61	38	3	30	50	36	68	12	10	14	16	16	15
EnvirTech. TUZV	71	39	2	49	38	40	75	9	7	10	13	17	16
Mech SPU	68	47	2	36	16	34	78	8	7	16	9	18	17
ŠpecTechn TUAD	67	45	0	19	28	32	76	8	7	19	12	20	18
Stav ŽU	67	34	0	41	22	33	69	8	7	17	15	19	19
ŠpecInž ŽU	58	36	0	23	12	26	64	8	6	21	21	21	20
Archit STUBA	72	74	1	48	40	47	100	100	4	4	1	1	21
MechTron TUAD	50	35	4	0	9	20	58	6	4	22	22	22	22

Tabuľka C.3: Výsledky podľa ukazovateľov - Technické vedy

Lekárske vedy

Fakulta	Ukazovatele ARRA					Hodnotenie - Rating				Poradie - Ranking			
	Učit Štud	Záujem	Publ Cit	Dokt	Granty	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR
JessenLek UK	85	86	40	100	82	79	100	100	100	1	1	1	1
Lek UK	96	76	41	77	28	64	100	100	75	2	1	1	2
Lek UPJŠ	78	54	48	67	24	54	100	100	60	4	1	1	3
Farm UK	85	81	10	46	81	61	100	54	53	3	4	4	4

Tabuľka C.4: Výsledky podľa ukazovateľov - Lekárske vedy

Spoločenské vedy

Fakulta	Ukazovatele ARRA					Hodnotenie - Rating				Poradie - Ranking			
	Učit Štud	Záujem	Publ Cit	Dokt	Granty	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR
FTVŠ UK	92	44	12	40	49	47	100	100	100	2	1	1	1
MedzVzťah EU BA	71	73	11	60	30	49	100	100	100	1	1	1	1
Pedag TVU	76	30	27	14	48	39	100	100	100	7	1	1	1
Ekonom TUKE	70	51	10	14	85	46	100	100	100	4	1	1	1
ZdravSoc TVU	96	42	10	79	7	47	100	100	100	3	1	1	1
Eur.Št. SPU	57	46	14	29	42	38	86	82	75	9	14	7	6
Obchod EU BA	72	50	12	28	27	38	90	76	72	8	11	8	7
NárHosp. EU BA	81	38	10	20	25	35	87	64	62	13	12	9	8
EkonomManSPU	76	75	3	32	35	44	100	100	57	5	1	1	9
HospInfo EU BA	67	35	10	20	13	29	76	47	44	22	22	12	10
SocEkon UK	88	45	8	9	29	36	96	45	44	12	8	13	11
PodnHosp. EU BA	71	31	8	23	11	29	75	42	40	23	24	14	12
Soc UKF	58	52	5	11	38	33	78	47	39	17	20	11	13
PodnMan EU BA	73	36	4	16	18	29	79	42	35	20	19	16	14
Ekonom UMB	61	36	3	20	43	33	73	40	32	18	25	17	15
Pedas ŽU	75	67	0	35	22	40	95	42	31	6	9	15	16
Práv TVU	82	42	0	25	38	37	90	34	31	10	10	19	17
Manag UK	59	75	3	29	6	34	100	49	30	14	1	10	18
Práv UPJŠ	78	39	4	9	9	28	84	32	29	25	15	21	19
Pedag KU	55	30	4	13	17	24	61	38	28	29	30	18	20
Pedag UK	68	44	2	29	42	37	82	33	28	11	17	20	21
Pedag PU	56	36	0	26	47	33	77	31	22	16	21	22	22
Pedag UKF	63	35	0	25	36	32	72	29	22	19	26	23	23
Pedag UMB	72	44	7	20	4	29	82	21	19	20	18	25	24
Práv UK	68	62	1	19	19	34	87	23	15	15	13	24	25
Polit UMB	75	42	5	15	3	28	83	16	15	24	16	26	26
Práv UMB	64	45	0	10	3	24	75	13	12	28	23	29	27
VerSpr UPJŠ	61	35	5	0	33	27	69	14	10	27	28	28	28
SocEkon TUAD	49	43	0	0	44	27	70	14	10	26	27	27	29
MasMed UCM	52	50	0	0	10	22	68	10	8	30	29	30	30
Zdravotnícka PU	42	35	1	0	3	16	52	9	6	31	31	31	31

Tabuľka C.5: Výsledky podľa ukazovateľov - Spoločenské vedy

Humanitné vedy

	Ukazovatele ARRA					Hodnotenie - Rating				Poradie - Ranking			
Fakulta	Učit Štud	Záujem	Publ Cit	Dokt	Granty	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR	ARRA	CCR	SBM	SBM-AR
HumPrír PU	53	35	72	14	64	48	100	100	100	1	1	1	1
Fil UK	61	45	58	43	17	45	100	100	100	2	1	1	1
Fil PU	52	38	47	35	41	43	97	94	86	4	11	9	3
Fil TVU	52	50	22	38	23	37	88	77	62	9	14	10	4
Hum UMB	42	25	10	28	30	27	68	42	40	15	17	13	5
FilmTel VŠMU	69	49	0	69	26	43	100	100	34	4	1	1	6
Teol.TVU	71	56	0	67	19	43	100	100	33	4	1	1	7
HudTan VŠMU	83	69	0	57	8	43	100	100	32	3	1	1	8
Fil KU	43	23	5	17	23	22	60	24	22	19	19	15	9
Divadelná VŠMU	78	55	0	42	22	39	99	51	20	8	9	12	10
Pravosl.PU	53	41	0	67	15	35	97	60	19	12	10	11	11
VŠVU BL	72	84	0	29	14	40	100	100	18	7	1	1	12
Evanj UK	64	50	24	42	3	37	88	29	18	10	13	14	13
Umení TUKE	49	59	0	0	75	37	100	100	13	10	1	1	14
MuzUm AU	85	54	0	0	34	35	100	100	12	13	1	1	15
Fil UKF	43	44	0	26	10	25	60	13	11	17	18	16	16
Greckokat.PU	50	32	0	6	16	21	59	11	10	20	20	20	17
Fil UCM	46	39	5	0	10	20	59	12	8	21	21	18	18
RímsKat UK	54	41	2	45	2	29	72	12	8	14	16	17	19
Fil UMB	47	34	0	0	4	17	56	8	8	22	22	22	20
DramUm AU	80	46	0	0	0	25	94	12	6	16	12	19	21
VýtvarUm AU	69	54	0	0	0	25	83	9	6	17	15	21	22

Tabuľka C.6: Výsledky podľa ukazovateľov - Humanitné vedy

D. Priebeh hodnotenia podľa indikátorov - Tabuľky

Prírodné vedy - všetky tabuľky

	Učitelia a študenti			Záujem o štúdium			Grantová úspešnosť		
Fakulta	P+D/100 š	PhD/učit	P+D/učit	prih/plan	zapis/prij	zahršt/štud	granty/tvp	VG+KG/tvp	APVT/tvp
Ekolenv TUZ	2,779	0,673	0,372	1,769	0,650	0,567	34,674	34,674	0
FMFI UK	6,027	0,751	0,469	1,330	0,580	0,628	249,610	47,483	31,248
FIIT STUBA	1,341	0,583	0,387	2,145	0,650	0,972	326,306	52,335	77,856
Prír UCM	2,655	0,630	0,430	1,051	0,480	0	22,471	9,885	0
Prír UK	3,929	0,833	0,435	2,711	0,420	1,224	236,465	74,797	72,914
Prír UKF	1,464	0,660	0,312	2,738	0,520	0,706	75,064	41,330	0
Prír UMB	0,928	0,595	0,242	1,466	0,470	0,354	31,185	20,342	3,266
Prír UPJŠ	4,731	0,779	0,481	2,527	0,420	0,337	142,069	64,962	38,404
Prír ŽU	1,306	0,365	0,244	2,451	0,670	0,096	22,367	5,856	0

Tabuľka D.1: Prírodné vedy - Indikátory - 1. časť

	Publikácie a citácie					Doktorandské štúdium			
Fakulta	publ./tvor.p	SCI/tvor.p	SCI/pub	5cit/tvor.p	25cit/tvorp	dokt.i/P+D	dokt/P+D	absdok/P+D	dokt/štud
Ekolenv TUZ	1,032	1,684	1,633	0,084	0	1,088	4,762	0,385	0,132
FMFI UK	5,020	40,333	8,034	2,009	0,380	1,515	4,886	0,218	0,293
FIIT STUBA	0,276	0,042	0,154	0	0	1,522	2,464	0	0,033
Prír UCM	0,643	1,038	1,615	0,099	0	0	0	0	0
Prír UK	3,044	19,100	4,270	1,110	0,135	1,751	3,470	0,353	0,135
Prír UKF	0,946	2,000	2,115	0,128	0,010	1,636	4,981	0,372	0,072
Prír UMB	0,764	2,344	3,069	0,149	0	0,797	3,297	0,205	0,031
Prír UPJŠ	6,024	23,259	3,861	1,454	0,117	1,069	1,617	0,230	0,076
Prír ŽU	0,122	0,033	0,273	0	0	0,321	0,917	0,092	0,012

Tabuľka D.2: Prírodné vedy - Indikátory - 2. časť

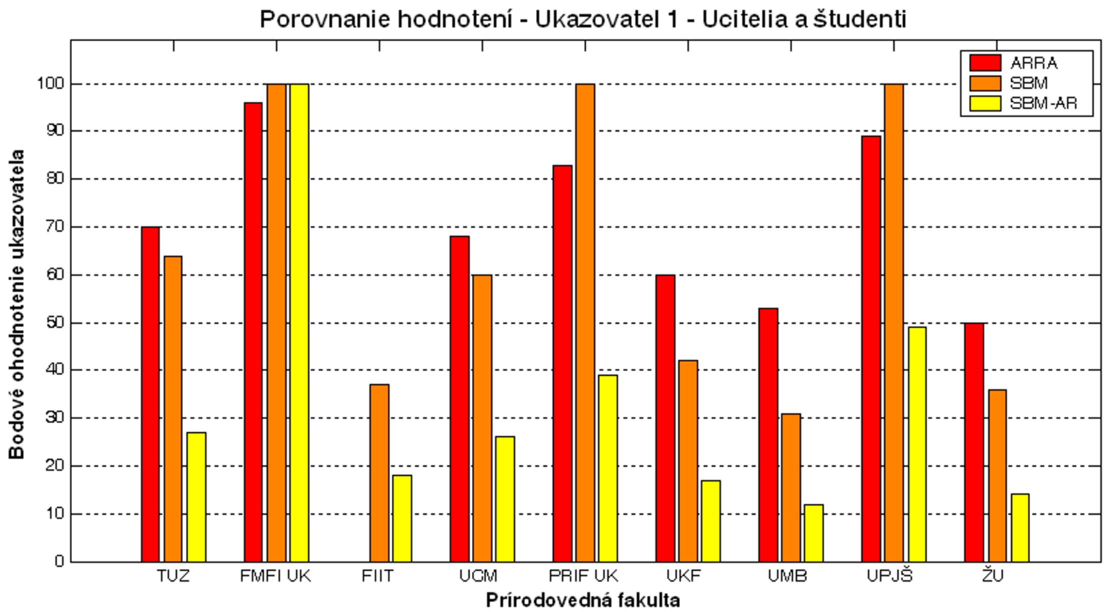
Použité ohraničenia multiplikátorov

Ukazovateľ	Indikátor A	/	Indikátor B	Min. u_A/u_B	Max. u_A/u_B
Študenti a učitelia	P+D/100š	/	uč/100 št.	0,25	1
	PhD/učit	/	uč/100 št.	1	2
	P+D/učit	/	uč/100 št.	0,25	1,67
	PhD/učit	/	P+D/100š	2	5
	P+D/učit	/	P+D/100š	1	5
	P+D/učit	/	PhD/učit	0,25	1
Záujem o štúdium	zapís/prij	/	prihl/plan	1	80
	100(zahršt/štud)	/	prihl/plan	0,25	19
	100(zahršt/štud)	/	zapís/prij	0,24	0,75
Publikácie a citácie	SCI/tvor.p	/	pub/tvor.p	0,2	1
	SCI/pub	/	pub/tvor.p	0,17	2,67
	5cit/tvor.p	/	pub/tvor.p	0,08	1
	25cit/tvorp	/	pub/tvor.p	0,08	1
	SCI/pub	/	SCI/tvor.p	0,5	2,67
	5cit/tvor.p	/	SCI/tvor.p	0,25	1
	25cit/tvorp	/	SCI/tvor.p	0,25	1
	5cit/tvor.p	/	SCI/pub	0,38	0,5
	25cit/tvorp	/	SCI/pub	0,38	0,5
	25cit/tvorp	/	5cit/tvor.p	1	1
Doktorandské štúdium	dokt/P+D	/	dokt.i/P+D	1	1
	absdok/P+D	/	dokt.i/P+D	1	49
	dokt/štud	/	dokt.i/P+D	2	49
	absdok/P+D	/	dokt/P+D	1	49
	dokt/štud	/	dokt/P+D	2	49
	dokt/štud	/	absdok/P+D	1	2
Grantová úspešnosť	VG+KG/tvp	/	granty/tvp	0,13	0,75
	APVT/tvp	/	granty/tvp	0,13	0,75
	APVT/tvp	/	VG+KG/tvp	1	1,5
Celkovo	Záujem	/	Učit a štud	0,5	1
	Publ a citácie	/	Učit a štud	1,5	1,95
	Doktorandské	/	Učit a štud	0,05	1,5
	Granty	/	Učit a štud	0,5	1
	Publ a citácie	/	Záujem	1,95	3
	Doktorandské	/	Záujem	0,05	3
	Granty	/	Záujem	1	2
	Doktorandské	/	Publ a citácie	0,03	1
	Granty	/	Publ a citácie	0,33	0,67
	Granty	/	Doktorandské	0,33	20

Tabuľka D.3: Použité ohraničenia indikátorov (rovnaké pre všetky skupiny)

Fakulta	Učit. a štud.			Záujem			Publ. a cit.			Doktorandské			Grantová úsp.		
	ARRA	SBM-AR	SBM	ARRA	SBM-AR	SBM	ARRA	SBM-AR	SBM	ARRA	SBM-AR	SBM	ARRA	SBM-AR	SBM
Ekolenv TUZ	70	27	64	69	76	76	9	1	8	66	95	100	17	1	6
FMFI UK	96	100	100	62	68	68	97	100	100	81	100	100	77	38	61
FIIT STUBA		18	37		100	100		0	0		23	31		100	100
Prír UCM	68	26	60	37	53	57	8	1	6	0	0	0	7	1	5
Prír UK	83	39	100	87	100	100	53	2	49	94	83	100	88	68	100
Prír UKF	60	17	42	78	100	100	11	0	6	73	100	100	28	1	7
Prír UMB	53	12	31	51	49	49	13	1	12	41	26	29	13	2	8
Prír UPJŠ	89	49	100	61	53	53	62	3	100	60	39	44	56	30	61
Prír ŽU	50	14	36	66	41	100	1	0	0	17	8	11	6	1	4

Tabuľka D.4: Vyhodnotenie prvej fázy - porovnanie ARRA, SBM a SBM-AR



Obr. D.1: Porovnanie hodnoty ukazovateľa **Učitelia a študenti** pri rôznych vyhodnoteniach indikátorov

Celkové vyhodnotenie (SBM-AR v prvej fáze)

Fakulta	Učit a Štud	Záujem	Publ a Citácie	Doktorandské	Granty	Priemer	CCR	SBM	SBM-AR	Priemer	CCR	SBM	SBM-AR	ARRA Ranking
Ekolenv TUZ	27	76	1	95	1	40	95	4	2	5	5	7	7	5
FMFI UK	100	68	100	100	38	81,2	100	100	100	1	1	1	1	1
FIIT STUBA	18	100	0	23	100	48,2	100	100	9	3	1	1	4	-
Prír UCM	26	53	1	0	1	16,2	55	3	2	8	7	9	9	8
Prír UK	39	100	2	83	68	58,4	100	100	9	2	1	1	3	2
Prír UKF	17	100	0	100	1	43,6	100	100	2	4	1	1	6	4
Prír UMB	12	49	1	26	2	18	49	4	3	7	8	8	5	6
Prír UPJŠ	49	53	3	39	30	34,8	65	12	10	6	6	5	2	3
Prír ŽU	14	41	0	8	1	12,8	41	5	2	9	9	6	8	7

Tabuľka D.5: Celkové vyhodnotenie - v prvej fáze používame SBM-AR

Celkové vyhodnotenie (SBM v prvej fáze)

Fakulta	Učit a štud	Záujem	Publ a citácie	Doktorandské	Granty	Priemer	CCR	SBM	SBM-AR	Priemer	CCR	SBM	SBM-AR	ARRA Ranking
Ekolenv TUZ	64	76	8	100	6	50,8	100	19	12	6	1	5	6	5
FMFI UK	100	68	100	100	61	85,8	100	100	100	2	1	1	1	1
FIIT STUBA	37	100	0	31	100	53,6	100	15	9	4	1	7	7	-
Prír UCM	60	57	6	0	5	25,6	60	6	4	9	8	9	9	8
Prír UK	100	100	49	100	100	89,8	100	100	97	1	1	1	2	2
Prír UKF	42	100	6	100	7	51	100	19	13	5	1	6	4	4
Prír UMB	31	49	12	29	8	25,8	49	20	12	8	9	4	5	6
Prír UPJŠ	100	53	100	44	61	71,6	100	76	76	3	1	3	3	3
Prír ŽU	36	100	0	11	4	30,2	100	8	6	7	1	8	8	7

Tabuľka D.6: Celkové vyhodnotenie - v prvej fáze používame SBM

E. Výsledky fakúlt podľa indikátorov - Tabuľky

Nasleduje 9 stranová tabuľka E.1 s podrobnými údajmi - vstupné údaje, ohodnotenia ukazovateľov, celkové hodnotenie a výsledné - pre všetky skupiny fakúlt počítané rôznymi metódami. Popis jednotlivých údajov sa nachádza v texte práce.

Martin Lauko Bakalárska práca		VSTUPNÉ ÚDAJE: Publikácie a citácie					Doktorandské štúdium				Grantová úspešnosť			Študenti a učitelia				Záujem o štúdium		
Zameranie	Fakulta	pub/tvor.p	SCI/tvor.p	SCI/pub	5cit/tvor.p	25cit/tvorp	dokt.i/P+D	dokt/P+D	absdok/P+D	dokt/štud	granty/tvp	VG+KG/tvp	APVT/tvp	uč/100 št.	P+D/100 š	PhD/učit	P+D/učit	prih/plan	zapis/prij	100* zahršt/štud
Prírodné vedy	Ekolenv TUZ	1,03	1,68	1,63	0,08	0,00	1,09	4,76	0,385	0,132	34,67	34,674	0,000	7,467	2,779	0,673	0,372	1,769	0,650	0,567
	FMFI UK	5,02	40,33	8,03	2,01	0,38	1,52	4,89	0,218	0,293	249,61	47,483	31,248	12,854	6,027	0,751	0,469	1,330	0,580	0,628
	FIIT STUBA	0,28	0,04	0,15	0,00	0,00	1,52	2,46	0,000	0,033	326,31	52,335	77,856	3,469	1,341	0,583	0,387	2,145	0,650	0,972
	Prír UCM	0,64	1,04	1,62	0,10	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	22,47	9,885	0,000	6,170	2,655	0,630	0,430	1,051	0,480	0,000
	Prír UK	3,04	19,10	4,27	1,11	0,14	1,75	3,47	0,353	0,135	236,46	74,797	72,914	9,028	3,929	0,833	0,435	2,711	0,420	1,224
	Prír UKF	0,95	2,00	2,11	0,13	0,01	1,64	4,98	0,372	0,072	75,06	41,330	0,000	4,692	1,464	0,660	0,312	2,738	0,520	0,706
	Prír UMB	0,76	2,34	3,07	0,15	0,00	0,80	3,30	0,205	0,031	31,19	20,342	3,266	3,830	0,928	0,595	0,242	1,466	0,470	0,354
	Prír UPJŠ	6,02	23,26	3,86	1,45	0,12	1,07	1,62	0,230	0,076	142,07	64,962	38,404	9,827	4,731	0,779	0,481	2,527	0,420	0,337
	Prír ŽU	0,12	0,03	0,27	0,00	0,00	0,32	0,92	0,092	0,012	22,37	5,856	0,000	5,345	1,306	0,365	0,244	2,451	0,670	0,096
Technické vedy	Archit STUBA	0,04	0,01	0,20	0,00	0,00	1,06	3,48	0,200	0,122	351,69	21,687	2,228	9,341	3,485	0,699	0,373	1,800	0,790	2,041
	Berg TUKE	0,61	1,40	2,28	0,08	0,01	1,20	5,30	0,500	0,078	95,12	37,921	0,000	3,887	1,479	0,696	0,381	7,930	0,480	0,288
	Elektr STUBA	2,07	7,70	3,72	0,48	0,04	1,09	3,34	0,200	0,135	286,29	66,391	43,420	8,664	4,095	0,785	0,473	1,188	0,650	1,527
	Elektr TUKE	0,75	1,28	1,72	0,10	0,00	0,97	2,49	0,200	0,068	104,61	41,149	6,144	6,581	2,747	0,736	0,417	1,162	0,590	0,856
	Elektr ŽU	0,29	0,21	0,71	0,01	0,00	1,06	2,49	0,100	0,072	78,56	12,531	8,723	6,899	2,891	0,688	0,419	2,010	0,620	0,619
	EnvirTech. TUZV	0,13	0,04	0,29	0,00	0,00	1,17	2,98	0,200	0,088	95,63	46,418	20,479	6,821	2,962	0,725	0,434	2,483	0,620	0,163
	Hutn TUKE	2,60	3,84	1,47	0,28	0,00	1,30	3,15	0,300	0,119	137,84	54,538	20,723	7,872	3,800	0,767	0,483	1,519	0,630	0,138
	ChemTechn. STUBA	7,59	31,42	4,14	2,16	0,15	1,54	2,35	0,200	0,171	385,98	69,336	79,473	12,628	7,341	0,865	0,581	2,090	0,590	0,892
	MatTechn STUBA	0,28	0,26	0,94	0,01	0,00	0,72	3,00	0,000	0,054	4,31	4,305	17,842	5,658	1,787	0,592	0,316	3,328	0,430	0,366
	Mech SPU	0,12	0,05	0,40	0,00	0,00	0,79	1,97	0,100	0,051	54,58	26,167	0,000	5,548	2,612	0,736	0,471	1,908	0,680	0,625
	MechTron TUAD	0,21	0,12	0,60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,200	0,000	71,69	24,302	0,000	4,234	1,287	0,529	0,304	2,114	0,560	0,131
	PriemTech TUAD	1,63	5,25	3,22	0,37	0,00	1,35	3,42	0,000	0,104	31,19	14,137	26,326	6,935	3,002	0,588	0,433	0,980	0,640	0,000
	Riadenia a Inf ŽU	0,15	0,16	1,07	0,01	0,00	1,22	3,51	0,000	0,048	189,17	25,246	0,000	6,043	1,375	0,521	0,228	1,983	0,610	0,138
	Stav STUBA	0,62	2,00	3,21	0,14	0,00	1,14	2,94	0,200	0,087	91,29	22,242	24,735	7,314	2,803	0,741	0,383	1,475	0,690	0,085
	Stav TUKE	0,28	0,59	2,10	0,03	0,00	0,76	2,16	0,100	0,073	115,48	45,436	0,000	9,672	3,403	0,692	0,352	1,036	0,730	0,697
	Stav ŽU	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	1,02	2,84	0,200	0,082	62,45	49,250	17,954	7,013	2,729	0,678	0,389	1,640	0,540	0,264
	Stroj STUBA	0,40	1,29	3,20	0,09	0,01	1,13	2,87	0,100	0,099	82,13	26,289	23,974	8,745	3,665	0,668	0,419	1,117	0,630	1,545
	Stroj TUKE	0,20	0,20	0,98	0,01	0,00	1,15	4,23	0,100	0,079	130,37	45,618	7,680	5,253	1,863	0,675	0,355	0,963	0,670	0,135
	Stroj ŽU	0,18	0,14	0,80	0,01	0,00	1,50	5,76	0,300	0,162	142,61	61,393	38,946	7,105	2,815	0,782	0,396	1,624	0,460	0,161
	ŠpecInž ŽU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,80	1,66	0,400	0,021	187,78	49,151	1,148	3,177	1,266	0,727	0,399	2,238	0,630	0,000
	ŠpecTechn TUAD	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,52	2,19	0,000	0,063	27,20	17,850	51,315	6,075	2,897	0,631	0,477	0,958	0,710	0,704
	VýrTech TUKE	0,10	0,05	0,50	0,00	0,00	0,78	2,18	0,000	0,035	102,19	13,616	0,000	4,778	1,587	0,777	0,332	1,800	0,680	0,115

Tab. E.1

Martin Lauko		OHODNOTENIA UKAZOVATEĽOV														
Bakalárska práca		Publikácie a citácie			Doktorandské štúdium			Grantová úspešnosť			Študenti a učitelia			Záujem o štúdium		
Zameranie	Fakulta	ARRA	SBM	SBM-AR	ARRA	SBM	SBM-AR	ARRA	SBM	SBM-AR	ARRA	SBM	SBM-AR	ARRA	SBM	SBM-AR
Prírodné vedy	Ekolenv TUZ	70	64	27	69	76	76	9	8	1	66	100	95	17	6	1
	FMFI UK	96	100	100	62	68	68	97	100	100	81	100	100	77	61	38
	FIIT STUBA		37	18		100	100		0	0		31	23		100	100
	Prír UCM	68	60	26	37	57	53	8	6	1	0	0	0	7	5	1
	Prír UK	83	100	39	87	100	100	53	49	2	94	100	83	88	100	68
	Prír UKF	60	42	17	78	100	100	11	6	0	73	100	100	28	7	1
	Prír UMB	53	31	12	51	49	49	13	12	1	41	29	26	13	8	2
	Prír UPJŠ	89	100	49	61	53	53	62	100	3	60	44	39	56	61	30
	Prír ŽU	50	36	14	66	100	41	1	0	0	17	11	8	6	4	1
Technické vedy	Archit STUBA	72	64	32	74	100	100	1	0	0	48	68	54	40	8	4
	Berg TUKE	59	36	18	58	100	100	15	6	0	67	100	100	31	6	1
	Elektr STUBA	78	72	37	57	59	58	38	29	1	51	69	55	82	71	43
	Elektr TUKE	69	56	26	44	43	43	12	8	1	44	52	40	30	16	4
	Elektr ŽU	68	57	26	45	55	54	4	1	0	39	43	37	19	15	5
	EnvirTech. TUZV	71	58	27	39	22	21	2	1	0	49	61	50	38	32	12
	Hutn TUKE	76	68	34	35	17	16	19	20	3	69	75	61	43	38	13
	ChemTechn. STUBA	99	100	100	48	63	63	100	100	100	82	100	61	84	100	100
	MatTechn STUBA	58	41	18	38	43	41	6	1	0	30	44	29	20	3	2
	Mech SPU	68	53	26	47	56	55	2	1	1	36	36	29	16	6	1
	MechTron TUAD	50	33	15	35	17	16	4	2	1	0	30	27	9	6	1
	PriemTech TUAD	64	56	27	31	40	32	27	26	5	46	71	51	47	15	7
	Riadenia a Inf ŽU	52	34	13	36	18	17	6	1	0	46	53	35	21	6	2
	Stav STUBA	68	57	26	37	11	11	20	5	0	44	60	49	37	28	12
	Stav TUKE	72	63	32	47	47	44	12	3	0	36	40	31	26	7	1
	Stav ŽU	67	55	25	34	29	27	0	1	0	41	57	45	22	25	10
	Stroj STUBA	72	65	33	57	57	55	19	5	0	44	47	40	41	28	13
	Stroj TUKE	60	43	19	35	17	16	5	1	0	53	48	45	41	20	5
	Stroj ŽU	71	57	26	29	19	17	4	1	0	71	100	100	59	51	24
	ŠpecInž ŽU	58	32	17	36	63	57	0	0	0	23	34	28	12	4	1
	ŠpecTechn TUAD	67	56	27	45	44	41	0	0	0	19	37	24	28	15	9
	VýrTech TUKE	61	39	18	38	15	14	3	1	1	30	35	23	50	6	1

Martin Lauko		CELKOVÉ HODNOTENIE									VÝSLEDNÉ PORADIE								
Bakalárska práca		ARRA	Prvá fáza SBM				Prvá fáza SBM-AR				ARRA	Prvá fáza SBM				Prvá fáza SBM-AR			
Zameranie	Fakulta	Priemer	Priemer	CCR	SBM	SBM-AR	Priemer	CCR	SBM	SBM-AR	Priemer	Priemer	CCR	SBM	SBM-AR	Priemer	CCR	SBM	SBM-AR
Prírodné vedy	Ekolenv TUZ	46	51	100	19	12	40	95	4	1,9	5	6	1	5	5	5	5	7	7
	FMFI UK	83	86	100	100	100	81	100	100	100	1	2	1	1	1	1	1	1	1
	FIIT STUBA	-	54	100	15	9,1	48	100	100	9,1	-	4	1	7	7	3	1	1	4
	Prír UCM	24	26	60	6	3,9	16	55	2,6	1,6	8	9	8	9	9	8	7	9	9
	Prír UK	81	90	100	100	97	58	100	100	9,3	2	1	1	1	2	2	1	1	3
	Prír UKF	50	51	100	19	13	44	100	100	2	4	5	1	5	4	4	1	1	6
	Prír UMB	34	26	49	20	12	18	49	3,8	2,8	6	8	9	4	5	7	8	8	5
	Prír UPJŠ	66	72	100	76	76	35	65	12	10	3	3	1	3	3	6	6	5	2
	Prír ŽU	28	30	100	7,9	5,8	13	41	4,5	1,7	7	7	1	8	8	9	9	6	8
Technické vedy	Archit STUBA	47	48	100	100	6,8	38	100	100	5,7	4	4	1	1	10	4	1	1	5
	Berg TUKE	46	50	100	100	10	44	100	100	2	7	3	1	1	8	2	1	1	17
	Elektr STUBA	61	60	85	57	56	39	74	4,7	3,2	2	2	5	4	2	3	5	14	13
	Elektr TUKE	40	35	61	21	19	23	50	3,8	2,8	10	9	13	7	5	10	16	17	14
	Elektr ŽU	35	34	69	4,5	3,2	24	59	6,4	5,3	15	11	9	17	14	8	8	12	7
	EnvirTech. TUZV	40	35	61	4,6	3,1	22	57	7,4	5,2	10	10	13	14	16	12	11	8	9
	Hutn TUKE	48	44	75	35	22	25	69	10	7,9	3	6	6	5	4	7	6	6	3
	ChemTechn. STUBA	83	93	100	100	100	85	100	100	100	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	MatTechn STUBA	30	26	52	3,6	2,9	18	44	4,5	2,8	20	18	19	22	19	18	19	15	14
	Mech SPU	34	30	67	4,1	3,1	22	59	2,4	1,5	16	15	10	19	16	11	8	20	18
	MechTron TUAD	20	18	33	6,5	5,2	12	31	2,4	1,4	22	22	22	12	12	21	21	20	21
	PriemTech TUAD	43	42	71	33	23	24	58	12	9,7	8	7	8	6	3	8	10	5	2
	Riadenia a Inf ŽU	32	22	53	4	2,7	13	37	4,4	2,7	18	20	18	20	21	20	20	16	16
	Stav STUBA	41	32	60	15	12	20	55	7,1	5,1	9	13	16	9	7	17	13	10	11
	Stav TUKE	39	32	67	9,4	8,3	22	52	3,2	1,5	13	14	10	10	9	13	14	18	18
	Stav ŽU	33	33	57	4,6	3	21	52	7,2	5,2	17	12	17	14	18	14	14	9	9
	Stroj STUBA	47	40	75	18	15	28	63	7,8	5,7	6	8	6	8	6	6	7	7	5
	Stroj TUKE	39	26	48	4,4	2,8	17	49	6,1	4,9	12	19	20	18	20	19	17	13	12
	Stroj ŽU	47	46	100	4,6	3,2	33	100	100	6,3	5	5	1	14	14	5	1	1	4
	ŠpecInž ŽU	26	27	63	6	5,1	21	57	3,1	1,5	21	17	12	13	13	15	11	19	18
	ŠpecTechn TUAD	32	30	61	7,8	5,9	20	47	7,1	5,3	19	15	13	11	11	16	18	10	7
	VýrTech TUKE	36	19	39	4	2,7	11	29	2,4	1,4	14	21	21	20	21	22	22	20	21

Tab.
E.1

Martin Lauko		VSTUPNÉ ÚDAJE																		
Bakalárska práca		**Publikácie a citácie**					**Doktorandské štúdium**				**Grantová úspešnosť**			**Študenti a učitelia**				**Záujem o štúdium**		
Zameranie	**Fakulta**	**pub/tvor.p**	**SCI/tvor.p**	**SCI/pub**	**5cit/tvor.p**	**25cit/tvorp**	**dokt.i/P+D**	**dokt/P+D**	**absdok/P+D**	**dokt/štud**	**granty/tvp**	**VG+KG/tvp**	**APVT/tvp**	**uč/100 št.**	**P+D/100 š**	**PhD/učit**	**P+D/učit**	**prih/plan**	**zapis/prij**	**100* zahršt/štud**
Lekár.	Farm UK	3,72	15,91	4,28	0,27	0,04	0,55	1,47	0,200	0,362	79,51	56,081	6,477	9,773	3,339	0,717	0,342	3,396	0,860	9,965
	JessenLek UK	1,18	4,39	3,71	0,23	0,02	1,10	4,21	0,400	0,182	76,12	30,695	10,537	12,236	3,607	0,625	0,295	5,505	0,510	12,378
	Lek UK	1,95	6,75	3,46	0,22	0,02	0,76	3,50	0,300	0,075	29,20	21,005	3,788	14,913	5,025	0,668	0,337	4,817	0,670	7,644
	Lek UPJŠ	1,82	7,53	4,13	0,23	0,03	0,82	4,03	0,300	0,024	25,21	17,410	5,256	11,371	3,026	0,567	0,266	2,165	0,760	4,343
Poľnohosp.	Agro SPU	0,94	0,78	0,83	0,03	0,00	1,02	2,31	0,392	0,067	194,39	78,655	37,035	5,526	2,228	0,893	0,403	2,000	0,610	0,596
	BiotPotr. SPU	1,27	2,72	2,14	0,11	0,00	1,42	2,18	0,000	0,127	197,65	45,654	46,979	6,034	2,397	0,841	0,397	1,833	0,690	1,113
	Drev TUZV	0,64	0,47	0,73	0,01	0,00	1,34	3,98	0,213	0,101	86,88	50,787	6,697	5,822	2,560	0,665	0,440	2,059	0,770	1,686
	Les TUZV	0,84	2,72	3,25	0,22	0,01	1,16	3,09	0,188	0,048	104,23	92,394	0,000	7,367	4,133	0,833	0,561	1,710	0,610	0,274
	VeterLek. UVL	3,30	6,49	1,97	0,13	0,00	0,87	2,28	0,191	0,148	210,59	87,615	36,995	15,956	7,432	0,774	0,466	1,792	0,710	18,005
	Záhrad SPU	0,20	0,11	0,54	0,08	0,00	1,71	4,82	0,587	0,085	107,00	89,533	0,000	4,579	1,439	0,718	0,314	2,543	0,770	1,026
Humanitné vedy	Divadelná VŠMU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,90	1,35	0,092	0,126	20,71	20,706	0,000	14,308	8,577	0,630	0,599	4,314	0,950	3,162
	DramUm AU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	3,20	0,000	0,000	22,936	9,633	0,716	0,420	4,300	0,890	0,000
	Evanj UK	0,50	0,06	0,13	0,00	0,00	0,33	3,83	0,555	0,177	2,96	2,956	0,000	13,140	4,959	0,723	0,377	1,286	0,870	7,438
	Fil KU	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,92	1,63	0,000	0,020	391,95	4,836	0,000	4,353	1,238	0,498	0,284	1,395	0,510	0,243
	Fil PU	0,54	0,14	0,26	0,01	0,00	1,03	3,43	0,229	0,061	43,46	38,749	0,000	5,959	1,792	0,659	0,301	3,123	0,750	0,539
	Fil TVU	0,35	0,09	0,26	0,00	0,00	1,36	4,32	0,143	0,098	22,31	22,312	0,000	6,093	2,275	0,653	0,373	8,648	0,510	0,000
	Fil UCM	0,04	0,01	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,157	22,59	6,281	0,000	5,573	1,566	0,554	0,281	6,351	0,400	0,346
	Fil UK	0,51	0,27	0,54	0,01	0,00	0,71	4,56	0,448	0,026	30,61	14,602	0,000	9,693	3,488	0,762	0,360	3,584	0,830	1,625
	Fil UKF	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,92	2,51	0,132	0,186	37,68	7,761	0,000	3,984	1,047	0,533	0,263	5,351	0,640	1,099
	FilmTel VŠMU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,52	2,99	0,386	0,000	84,11	22,240	0,000	12,343	5,734	0,669	0,465	2,300	0,950	3,937
	Fil UMB	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,019	4,05	3,666	0,000	10,651	2,381	0,373	0,224	1,150	0,820	0,920
	Greckokat.PU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,31	2,03	0,000	0,250	132,95	9,631	0,000	3,098	0,940	0,701	0,303	1,350	0,760	0,898
	HudTan VŠMU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,18	2,87	0,191	0,024	13,18	3,896	0,000	22,058	10,096	0,643	0,458	1,522	0,890	15,756
	Hum UMB	0,11	0,03	0,25	0,00	0,00	1,00	2,80	0,138	0,025	90,41	7,102	0,000	3,268	0,874	0,494	0,268	1,134	0,610	0,223
	HumPrír PU	0,33	0,38	1,15	0,02	0,00	0,50	1,55	0,048	0,000	47,72	30,694	0,000	4,348	1,588	0,713	0,365	3,060	0,690	0,000
	MuzUm AU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,044	116,07	8,607	0,000	27,519	11,654	0,607	0,423	2,025	0,950	6,767
	Pravosl.PU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,55	4,14	0,574	0,200	13,96	13,958	0,000	3,401	1,072	0,864	0,315	3,556	0,820	0,000
	RímsKat UK	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,39	4,27	0,550	0,045	1,96	1,961	0,000	17,956	3,239	0,475	0,180	1,089	1,000	1,429
	Teol KU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,83	8,23	0,000	0,198	0,64	0,644	0,000	2,115	0,552	0,565	0,261	0,650	0,650	1,068
	Teol.TVU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,09	3,73	0,000	0,000	33,57	17,190	0,000	9,744	5,641	0,842	0,579	1,469	1,000	8,000
	Umení TUKE	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,119	595,04	47,507	0,000	12,957	3,502	0,330	0,270	7,354	0,840	1,167
	VŠVU BL	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75	1,66	0,038	0,000	27,77	12,943	0,000	20,298	8,194	0,495	0,404	5,536	0,980	13,966

Tab. E.1

Martin Lauko		OHODNOTENIA UKAZOVATEĽOV														
Bakalárska práca		**Publikácie a citácie**			**Doktorandské štúdium**			**Grantová úspešnosť**			**Študenti a učitelia**			**Záujem o štúdium**		
Zameranie	**Fakulta**	**ARRA**	**SBM**	**SBM-AR**	**ARRA**	**SBM**	**SBM-AR**	**ARRA**	**SBM**	**SBM-AR**	**ARRA**	**SBM**	**SBM-AR**	**ARRA**	**SBM**	**SBM-AR**
Lekár.	Farm UK	85	100	29	81	100	77	10	100	100	46	100	100	81	100	100
	JessenLek UK	85	83	37	86	100	100	40	47	1	100	100	100	82	100	65
	Lek UK	96	100	100	76	100	65	41	58	1	77	62	53	28	42	11
	Lek UPJŠ	78	74	28	54	57	45	48	65	1	67	35	31	24	39	14
Poľnohosp.	Agro SPU	67	100	18	54	12	10	12	24	2	59	61	45	77	94	80
	BiotPotr. SPU	66	71	19	56	17	17	76	64	9	49	100	48	65	100	74
	Drev TUZV	65	51	20	63	100	25	8	14	1	65	73	61	36	30	8
	Les TUZV	79	100	28	49	4	4	54	100	3	61	50	37	42	100	3
	VeterLek. UVL	94	100	100	88	100	100	85	100	100	61	100	43	81	100	100
	Záhrad SPU	55	36	13	69	100	18	4	6	3	83	100	100	43	20	3
Humanitné vedy	Divadelná VŠMU	78	100	22	55	45	45	0	0	0	42	32	29	22	9	1
	DramUm AU	80	100	36	46	29	29	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	Evanj UK	64	70	13	50	41	37	24	42	42	42	51	43	3	1	1
	Fil KU	43	22	6	23	4	4	5	10	8	17	24	13	23	23	2
	Fil PU	52	32	7	38	10	10	47	100	10	35	47	39	41	19	1
	Fil TVU	52	36	9	50	100	64	22	45	40	38	50	50	23	10	1
	Fil UCM	46	27	7	39	9	8	5	7	3	0	42	26	10	7	1
	Fil UK	61	61	11	45	27	27	58	100	100	43	34	29	17	12	1
	Fil UKF	43	19	6	44	20	20	0	2	2	26	46	40	10	11	1
	FilmTel VŠMU	69	71	15	49	43	43	0	0	0	69	80	64	26	26	1
	Fil UMB	47	36	7	34	14	14	0	0	0	0	7	3	4	2	1
	Greckokat.PU	50	19	6	32	14	14	0	0	0	6	100	17	16	22	1
	HudTan VŠMU	83	97	34	69	100	100	0	0	0	57	29	20	8	4	1
	Hum UMB	42	16	6	25	4	4	10	18	12	28	26	18	30	15	1
	HumPrír PU	53	30	8	35	26	25	72	100	100	14	19	15	64	19	1
	MuzUm AU	85	100	100	54	51	46	0	0	0	0	17	7	34	19	1
	Pravosl.PU	53	100	7	41	27	27	0	0	0	67	100	100	15	6	1
	RímsKat UK	54	46	8	41	38	19	2	10	8	45	39	38	2	1	1
	Teol KU		11	5		13	13		0	0		100	100		0	0
	Teol.TVU	71	100	17	56	100	42	0	0	0	67	100	62	19	13	1
	Umení TUKE	49	45	9	59	100	37	0	0	0	0	36	20	75	100	100
	VŠVU BL	72	79	24	84	100	100	0	0	0	29	18	14	14	10	1

Tab. E.1

Martin Lauko		CELKOVÉ HODNOTENIE									VÝSLEDNÉ PORADIE								
Bakalárska práca		**ARRA**	**Prvá fáza SBM**				**Prvá fáza SBM-AR**				**ARRA**	**Prvá fáza SBM**				**Prvá fáza SBM-AR**			
Zameranie	**Fakulta**	**Priemer**	**Priemer**	**CCR**	**SBM**	**SBM-AR**	**Priemer**	**CCR**	**SBM**	**SBM-AR**	**Priemer**	**Priemer**	**CCR**	**SBM**	**SBM-AR**	**Priemer**	**CCR**	**SBM**	**SBM-AR**
Lekár.	Farm UK	61	100	100	100	100	81	100	100	**100**	3	1	1	1	1	1	1	1	**1**
	JessenLek UK	79	86	100	79	79	61	100	100	***4,9***	1	2	1	2	2	2	1	1	**3**
	Lek UK	64	72	100	65	59	46	100	100	***5,4***	2	3	1	3	3	3	1	1	**2**
	Lek UPJŠ	54	54	74	50	45	24	50	*4,4*	***3,4***	4	4	4	4	4	4	4	4	**4**
Poľnohosp.	Agro SPU	54	58	100	31	19	31	90	*7,6*	***5,4***	4	4	1	4	4	3	3	4	**3**
	BiotPotr. SPU	62	70	100	46	32	33	90	22	**19**	2	3	1	2	2	2	3	3	**2**
	Drev TUZV	47	54	100	34	32	23	70	*5,8*	***2,7***	6	5	1	3	2	5	5	5	**6**
	Les TUZV	57	71	100	17	17	15	51	*5,2*	***3,7***	3	2	1	6	5	6	6	6	**5**
	VeterLek. UVL	82	100	100	100	100	89	100	100	**100**	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**
	Záhrad SPU	51	52	100	19	16	27	100	100	***5***	5	6	1	5	6	4	1	1	**4**
Humanitné vedy	Divadelná VŠMU	39	37	100	57	13	19	65	*7,4*	***3,8***	8	13	1	9	13	13	13	14	**14**
	DramUm AU	25	26	100	*7,2*	*3,5*	13	46	*6*	***3,5***	16	16	1	21	21	17	17	18	**17**
	Evanj UK	37	41	86	13	*7,4*	27	86	17	***8,2***	10	10	16	18	18	8	11	11	**8**
	Fil KU	22	17	42	15	*8,1*	*7*	24	*8,4*	***6***	18	20	20	16	15	21	21	13	**10**
	Fil PU	43	42	100	100	71	13	50	*6,7*	***3,6***	4	8	1	1	3	16	15	15	**16**
	Fil TVU	37	48	100	100	55	33	100	100	**14**	9	3	1	1	5	3	1	1	**5**
	Fil UCM	20	18	46	19	16	*9*	33	*5,1*	***3,1***	20	19	19	14	10	18	18	19	**20**
	Fil UK	45	47	100	100	100	34	100	100	**100**	2	4	1	1	1	1	1	1	**1**
	Fil UKF	25	20	48	*9,4*	*8,1*	14	49	*6,4*	***3,5***	17	18	18	19	15	15	16	17	**17**
	FilmTel VŠMU	43	44	90	29	19	25	87	18	***5,8***	4	7	15	13	8	10	10	10	**11**
	Fil UMB	17	12	36	*7,3*	*4,8*	*5*	16	*4,5*	***2,9***	21	22	22	20	20	22	22	22	**22**
	Greckokat.PU	21	31	100	100	13	*8*	26	*4,7*	***3***	19	14	1	1	13	20	20	21	**21**
	HudTan VŠMU	43	46	100	46	19	31	100	100	***6,6***	3	6	1	11	8	4	1	1	**9**
	Hum UMB	27	16	41	14	*8,1*	*8*	30	*5*	***3,2***	15	21	21	17	15	19	19	20	**19**
	HumPrír PU	48	39	100	100	71	30	100	78	**50**	1	11	1	1	3	6	1	8	**2**
	MuzUm AU	35	37	100	100	14	31	100	100	***9,2***	13	12	1	1	12	5	1	1	**7**
	Pravosl.PU	35	47	100	56	27	27	100	100	***9,5***	12	5	1	10	7	9	1	1	**6**
	RímsKat UK	29	27	50	*5,3*	*3,3*	15	51	*6,6*	***3,7***	14	15	17	22	22	14	14	16	**15**
	Teol KU	-	25	100	19	*6,4*	24	100	72	**15**	-	17	1	14	19	12	1	9	**4**
	Teol.TVU	43	63	100	100	100	24	86	17	***5,7***	4	1	1	1	1	11	11	11	**13**
	Umení TUKE	37	56	100	100	43	33	100	100	**24**	10	2	1	1	6	2	1	1	**3**
	VŠVU BL	40	41	100	31	16	28	100	86	***5,8***	7	9	1	12	10	7	1	7	**11**

Tab.
E.1

Martin Lauko		VSTUPNÉ ÚDAJE																		
Bakalárska práca		**Publikácie a citácie**					**Doktorandské štúdium**				**Grantová úspešnosť**			**Študenti a učitelia**				**Záujem o štúdium**		
Zameranie	**Fakulta**	**pub/tvor.p**	**SCI/tvor.p**	**SCI/pub**	**5cit/tvor.p**	**25cit/tvorp**	**dokt.i/P+D**	**dokt/P+D**	**absdok/P+D**	**dokt/štud**	**granty/tvp**	**VG+KG/tvp**	**APVT/tvp**	**uč/100 št.**	**P+D/100 š**	**PhD/učit**	**P+D/učit**	**prih/plan**	**zapis/prij**	**100* zahršt/štud**
Spoločenské vedy	Ekonom TUKE	0,52	0,18	0,35	0,00	0,00	0,83	2,50	0,000	0,031	270,25	24,671	6,463	4,704	1,254	0,620	0,267	5,367	0,630	0,822
	Ekonom UMB	0,12	0,02	0,17	0,00	0,00	0,72	2,32	0,300	0,020	206,93	16,461	0,000	3,722	0,881	0,572	0,237	2,819	0,490	0,888
	EkonomManSPU	0,10	0,03	0,25	0,00	0,00	1,03	2,15	0,300	0,036	50,74	17,980	0,000	4,287	1,667	0,626	0,389	8,131	0,910	1,209
	Eur.Št. SPU	0,13	0,09	0,75	0,00	0,00	1,67	3,97	0,000	0,025	261,07	0,000	0,000	2,384	0,624	0,698	0,262	4,297	0,650	0,620
	HospInfo EU BA	0,44	0,22	0,51	0,02	0,00	0,58	3,20	0,300	0,040	20,84	7,561	0,000	4,281	1,259	0,566	0,294	1,954	0,600	0,760
	Manag UK	0,14	0,03	0,20	0,00	0,00	0,86	6,97	0,400	0,053	42,97	0,999	0,000	2,240	0,775	0,570	0,346	5,886	0,750	3,237
	Manažment PU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	10,61	10,613	0,000	2,248	0,580	0,516	0,258	3,044	0,720	0,000
	MasMed UCM	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	6,46	6,455	0,000	2,968	0,666	0,361	0,224	4,736	0,760	0,341
	MedzVzťah EU BA	0,38	0,04	0,10	0,00	0,00	2,62	12,92	0,600	0,162	47,13	18,264	0,000	5,141	1,310	0,686	0,255	3,287	0,710	4,637
	NárHosp. EU BA	0,48	0,21	0,45	0,02	0,00	0,41	2,95	0,300	0,056	24,45	16,009	0,000	4,450	1,891	0,678	0,425	3,896	0,550	0,302
	Obchod EU BA	0,64	0,16	0,25	0,02	0,00	0,87	4,76	0,300	0,061	45,40	16,537	0,000	3,239	1,297	0,675	0,400	5,398	0,600	0,791
	Pedag KU	0,03	0,01	0,25	0,00	0,00	0,72	2,32	0,000	0,017	28,78	10,386	0,000	2,757	0,714	0,452	0,259	0,949	0,690	0,059
	Pedag PU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,22	3,67	0,300	0,025	21,59	7,807	0,000	3,680	0,664	0,501	0,180	1,450	0,830	0,000
	Pedag TVU	0,17	0,73	4,38	0,31	0,00	0,45	1,06	0,100	0,017	73,13	29,107	0,000	3,725	1,564	0,628	0,420	2,704	0,520	0,000
	Pedag UK	0,08	0,01	0,18	0,00	0,00	0,94	3,71	0,500	0,039	46,65	21,355	0,000	4,974	1,068	0,635	0,215	3,093	0,700	0,751
	Pedag UKF	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	4,25	0,300	0,045	41,89	23,178	0,000	4,724	1,059	0,500	0,224	2,282	0,680	0,135
	Pedag UMB	0,02	0,03	1,50	0,00	0,00	0,63	2,08	0,100	0,028	5,19	2,173	0,000	3,092	1,335	0,671	0,432	2,459	0,680	1,250
	Pedas ŽU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,07	3,69	0,400	0,053	17,80	10,518	0,000	4,115	1,485	0,653	0,361	3,533	0,700	3,772
	PodnHosp. EU BA	0,46	0,07	0,15	0,00	0,00	0,73	2,81	0,300	0,036	7,72	7,725	0,000	3,993	1,276	0,661	0,320	3,472	0,460	0,000
	PodnMan EU BA	0,25	0,01	0,04	0,00	0,00	0,48	3,43	0,200	0,056	14,42	11,862	0,000	4,574	1,652	0,536	0,361	3,375	0,500	0,591
	Polit UMB	0,04	0,04	1,00	0,00	0,00	0,38	2,69	0,200	0,049	1,93	1,929	0,000	6,188	1,808	0,470	0,292	3,306	0,680	0,425
	Práv TVU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,91	4,18	0,100	0,089	25,45	25,446	0,000	5,437	2,138	0,552	0,393	5,707	0,520	0,000
	Práv UK	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,71	3,17	0,100	0,033	80,91	7,803	0,000	2,852	1,046	0,656	0,367	4,692	0,910	1,248
	Práv UMB	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,44	3,11	0,100	0,040	1,73	1,727	0,000	4,101	1,007	0,573	0,245	5,715	0,580	0,000
	Práv UPJŠ	0,05	0,04	0,67	0,00	0,00	0,29	2,33	0,100	0,039	6,20	6,200	0,000	4,272	1,661	0,685	0,389	3,318	0,680	0,095
	Soc UKF	0,05	0,01	0,25	0,00	0,00	0,60	1,99	0,000	0,023	20,30	4,501	0,000	2,654	0,638	0,709	0,241	4,261	0,700	1,294
	SocEkon TUAD	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	97,54	24,623	0,000	1,967	0,489	0,495	0,249	3,388	0,770	0,155
	SocEkon UK	0,12	0,08	0,67	0,00	0,00	0,41	1,12	0,000	0,024	100,08	13,621	0,000	5,271	2,126	0,712	0,403	2,114	0,720	1,348
	Sredoeur.Št.UKF	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	3,32	0,000	0,000	5,122	1,159	0,706	0,226	1,571	0,580	0,000
	Športu PU	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,80	2,27	0,000	0,075	32,42	32,424	0,000	11,283	3,319	0,647	0,294	2,625	0,830	0,000
	FTVŠ UK	0,24	0,17	0,71	0,00	0,00	1,40	5,36	0,400	0,120	34,88	32,979	0,000	6,249	2,249	0,868	0,360	1,410	0,900	0,771
	VerSpr UPJŠ	0,19	0,03	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	22,50	22,500	0,000	3,521	0,903	0,545	0,256	2,896	0,640	0,000
	Zdravotnícka PU	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000	32,03	0,000	0,000	6,119	0,622	0,217	0,102	1,078	0,840	0,000
	ZdravSoc TVU	1,29	5,98	4,62	0,30	0,03	0,96	6,14	0,700	0,151	54,96	0,941	0,000	5,429	2,468	0,900	0,455	3,660	0,640	0,493

Tab. E.1

Martin Lauko Bakalárska práca		OHODNOTENIA UKAZOVATEĽOV														
		Publikácie a citácie			Doktorandské štúdium			Grantová úspešnosť			Študenti a učitelia			Záujem o štúdium		
Zameranie	Fakulta	ARRA	SBM	SBM-AR	ARRA	SBM	SBM-AR	ARRA	SBM	SBM-AR	ARRA	SBM	SBM-AR	ARRA	SBM	SBM-AR
Spoločenské vedy	Ekonom TUKE	70	56	19	51	46	46	10	9	9	14	24	12	85	100	100
	Ekonom UMB	61	44	15	36	38	38	3	1	1	20	21	11	43	41	6
	EkonomManSPU	76	69	26	75	100	100	3	2	1	32	27	17	35	27	2
	Eur.Št. SPU	57	35	14	46	34	34	14	5	5	29	30	13	42	16	12
	HospInfo EU BA	67	54	20	35	33	33	10	9	1	20	27	13	13	13	2
	Manag UK	59	38	17	75	100	100	3	2	1	29	42	24	6	7	1
	Manažment PU		30	13		52	49		0	0		0	0		9	2
	MasMed UCM	52	34	13	50	23	23	0	0	0	0	0	0	10	6	2
	MedzVzťah EU BA	71	60	20	73	100	100	11	2	2	60	100	100	30	26	2
	NárHosp. EU BA	81	78	29	38	18	18	10	8	1	20	25	10	25	17	2
	Obchod EU BA	72	60	23	50	45	45	12	6	1	28	39	21	27	25	2
	Pedag KU	55	35	14	30	4	4	4	1	0	13	17	8	17	17	2
	Pedag PU	56	36	12	36	36	35	0	0	0	26	29	17	47	14	2
	Pedag TVU	76	68	26	30	42	38	27	100	17	14	12	7	48	55	2
	Pedag UK	68	52	17	44	36	36	2	1	1	29	35	20	42	26	2
	Pedag UKF	63	49	16	35	8	8	0	0	0	25	36	20	36	25	2
	Pedag UMB	72	64	24	44	49	49	7	2	1	20	18	10	4	4	2
	Pedas ŽU	75	63	24	67	87	87	0	0	0	35	38	22	22	13	2
	PodnHosp. EU BA	71	56	21	31	43	41	8	4	4	23	27	14	11	7	2
	PodnMan EU BA	73	65	25	36	29	29	4	1	0	16	27	12	18	11	2
	Polit UMB	75	66	25	42	23	23	5	2	2	15	22	9	3	2	1
	Práv TVU	82	77	30	42	58	58	0	0	0	25	29	19	38	20	2
	Práv UK	68	50	20	62	100	67	1	5	2	19	21	13	19	23	2
	Práv UMB	64	48	16	45	60	60	0	0	0	10	20	10	3	2	1
	Práv UPJŠ	78	70	26	39	6	6	4	2	2	9	16	7	9	5	2
	Soc UKF	58	36	13	52	58	58	5	1	1	11	18	9	38	11	2
	SocEkon TUAD	49	27	12	43	12	10	0	1	1	0	0	0	44	37	2
	SocEkon UK	88	83	31	45	48	48	8	5	4	9	13	7	29	31	2
	Sredoeur.Št.UKF		56	18		34	32		0	0		0	0		1	1
	Športu PU		100	100		51	50		0	0		29	16		79	2
	FTVŠ UK	92	100	33	44	36	35	12	9	8	40	56	35	49	100	2
	VerSpr UPJŠ	61	43	16	35	48	45	5	2	2	0	0	0	33	17	2
	Zdravotnícka PU	42	30	9	35	29	29	1	2	1	0	0	0	3	7	2
	ZdravSoc TVU	96	100	36	42	27	27	10	100	100	79	100	49	7	8	1

Martin Lauko		CELKOVÉ HODNOTENIE									VÝSLEDNÉ PORADIE								
Bakalárska práca		**ARRA**	**Prvá fáza SBM**				**Prvá fáza SBM-AR**				**ARRA**	**Prvá fáza SBM**				**Prvá fáza SBM-AR**			
Zameranie	**Fakulta**	**Priemer**	**Priemer**	**CCR**	**SBM**	**SBM-AR**	**Priemer**	**CCR**	**SBM**	**SBM-AR**	**Priemer**	**Priemer**	**CCR**	**SBM**	**SBM-AR**	**Priemer**	**CCR**	**SBM**	**SBM-AR**
Spoločenské vedy	Ekonom TUKE	46	47	100	100	37	37	100	100	**45**	4	6	1	1	4	3	1	1	**2**
	Ekonom UMB	33	29	59	*4,7*	*4,1*	14	44	*5,5*	***4,5***	18	16	21	29	25	20	21	27	**24**
	EkonomManSPU	44	45	100	100	11	29	100	100	***6,8***	5	7	1	1	14	5	1	1	**9**
	Eur.Št. SPU	38	24	45	18	16	16	45	20	**18**	9	23	30	15	10	18	20	8	**4**
	HospInfo EU BA	29	27	58	27	24	14	41	*5*	***4,5***	22	19	24	10	5	21	23	29	**24**
	Manag UK	34	38	100	52	*8,9*	29	100	48	***4,3***	14	10	1	9	17	6	1	6	**28**
	Manažment PU	-	18	52	*5,5*	*4,1*	13	50	*6,8*	***4,7***	-	29	27	26	25	25	17	21	**22**
	MasMed UCM	22	13	37	*4,6*	*3,9*	*8*	28	*6,2*	***4,3***	30	34	31	30	29	32	32	24	**28**
	MedzVzťah EU BA	49	58	100	100	12	45	100	100	**25**	1	3	1	1	13	1	1	1	**3**
	NárHosp. EU BA	35	29	78	25	24	12	35	*4,6*	***4,4***	13	15	13	12	5	26	27	31	**27**
	Obchod EU BA	38	35	69	25	22	18	53	*6,1*	***4,9***	8	13	16	12	7	11	16	25	**18**
	Pedag KU	24	15	35	*4,3*	*3,4*	*6*	20	*7,1*	***4,9***	29	32	34	32	32	33	33	19	**18**
	Pedag PU	33	23	46	*8,6*	*7*	13	38	*8,5*	***5,5***	16	25	29	18	20	23	25	15	**15**
	Pedag TVU	39	55	100	100	100	18	57	11	***6,8***	7	4	1	1	1	13	14	12	**9**
	Pedag UK	37	30	59	*4,8*	*4,1*	15	42	*5,3*	***4,5***	11	14	21	27	25	19	22	28	**24**
	Pedag UKF	32	24	49	*8,3*	*7,1*	*9*	31	*8*	***5,2***	19	24	28	19	19	29	29	17	**17**
	Pedag UMB	29	27	72	*8,3*	*7,6*	17	56	*6,3*	***4,9***	20	17	14	19	18	15	15	23	**18**
	Pedas ŽU	40	40	91	26	*9,4*	27	88	27	***7,9***	6	8	10	11	15	7	7	7	**6**
	PodnHosp. EU BA	29	27	64	15	14	16	50	*9,4*	***6,2***	23	17	20	16	12	17	17	14	**13**
	PodnMan EU BA	29	27	65	*4,6*	*4*	14	40	*8,5*	***5,7***	20	20	18	30	28	22	24	15	**14**
	Polit UMB	28	23	66	*6,4*	*4,6*	12	35	*4,9*	***3***	24	25	17	23	22	26	27	30	**33**
	Práv TVU	37	37	86	13	*9*	22	67	12	***6,9***	10	11	11	17	16	9	9	11	**7**
	Práv UK	34	40	100	100	21	21	70	13	***6,8***	15	9	1	1	8	10	8	10	**9**
	Práv UMB	24	26	65	*7,9*	*4,6*	17	60	*5,9*	***3,3***	28	21	18	21	22	14	11	26	**32**
	Práv UPJŠ	28	20	70	*7,2*	*7*	*9*	30	*7,8*	***5,3***	25	28	15	22	20	30	31	18	**16**
	Soc UKF	33	25	58	*6,1*	*3,9*	17	58	*7,1*	***4,8***	17	22	24	24	29	16	13	19	**21**
	SocEkon TUAD	27	15	37	*3,8*	*2,8*	*5*	17	*3,8*	***3,4***	26	31	31	33	33	34	34	34	**31**
	SocEkon UK	36	36	86	22	18	18	61	11	***6,5***	12	12	11	14	9	11	10	12	**12**
	Sredoeur.Št.UKF	-	18	59	*3,6*	*2*	10	38	*4,3*	***2,6***	-	29	21	34	34	28	25	32	**34**
	Športu PU	-	52	100	100	15	34	100	100	**12**	-	5	1	1	11	4	1	1	**5**
	FTVŠ UK	47	60	100	100	57	23	60	15	***6,9***	2	2	1	1	3	8	11	9	**7**
	VerSpr UPJŠ	27	22	56	*5,7*	*4,4*	13	49	*6,8*	***4,7***	27	27	26	25	24	24	19	21	**22**
	Zdravotnícka PU	16	14	37	*4,8*	*3,9*	*8*	31	*3,9*	***3,6***	31	33	31	27	29	31	29	33	**30**
	ZdravSoc TVU	47	67	100	100	100	43	100	100	**100**	3	1	1	1	1	2	1	1	**1**