Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky

Katedra aplikovanej matematiky a štatisktiky
Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Základné pravdepodobnostné modely v teórii spoľahlivosti

(Bakalárska práca)

Lukáš Lafférs

Vedúci diplomovej práce:
Mgr. Radoslav Harman, PhD.

Bratislava, 2007

Čestne prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

. . . .

Lukáš Laffers

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu bakalárskej práce Mgr. Radoslavovi Harmanovi, za cenné rady a pripomienky pri tvorbe tejto práce.

Takisto ďakujem rodine a priateľom za podporu.

Abstrakt

Našim cieľom bude vysvetliť základné pojmy používané v teórii spoľahlivosti, formalizovať pojem "systém", popísať jeho rozličné reprezentácie a vlastnosti, potom odvodiť formulu pre strednú dobu do zlyhania týchto systémov. Na záver algoritmicky nájdeme všetky neizomorfné systémy s nízkym počtom nezávislých a rovnako spoľahlivých súčiastok a popíšeme ich charakteristiky.

Lafférs, Lukáš: Základné pravdepodobnostné modely v teórii spoľahlivosti [Bakalárska práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ: Mgr. Radoslav Harman, PhD., Bratislava, 2007, 26 s.

Kľúčové slová: teória spoľahlivosti, systém, pravdepodobnosť

Predhovor

Táto práca vznikla v rámci magisterského štúdia na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky. Vznikala postupne predovšetkým štúdiom odbornej literatúry, neskôr programovaním v softvéri *Matlab 7.0*. Jej účelom je poskytnúť stručný vhľad do pojmov teórie spoľahlivosti, odvodiť všeobecný výpočet priemernej životnosti systému a následne ho demonštrovať na konkrétnych jednoduchých príkladoch, ktoré treba algoritmicky generovať.

Obsah

1 Úvod

Teória spoľahlivosti hrá veľmi dôležitú úlohu v inžiniersko-technologickej praxi. S aplikáciami sa môžeme stretnúť pri bezpečnostných a spoľahlivostných systémoch, v jadrovom a chemickom priemysle, v poisťovníctve, pri tvorbe softvéru a v mnohých iných odvetviach. Široké spektrum aplikácií robí túto oblasť pravdepodobnosti a štatistiky veľmi atraktívnou. V tejto práci sa zameriame najskôr na základné pojmy z teórie spoľahlivosti, zovšeobecnenie a matematickú formuláciu spoľahlivostných systémov, rôzne možnosti ich reprezentácie. Ďalej sa pokúsime o odvodenie postupu počítania doby priemernej životnosti. Zaujímavé je, ako nám tento spôsob značne zjednoduší výpočet pre K z N systémy pri exponenciálnom rozdelení. Prínosom práce môže byť predovšetkým algoritmická identifikácia všetkých neizomorfných systémov s nízkym počtom nezávislých a rovnako spoľahlivých súčiastok. Ďalej vytvoríme prehľad týchto základných systémov s ich parametrami. Väčší dôraz sme kládli najmä na presné formulovanie daných pojmov, na správne uvedomenie si, čo je náhodná premenná, čo je množina udalostí a podobne, nakoľko sa do takejto úrovne táto téma nezvykne rozoberať, dané veci sa akosi mlčky predpokladajú.

2 Základné pojmy z teórie spoľahlivosti

2.1 Spoľahlivosť a miera zlyhania

Ak je X náhodná premenná označujúca životnosť (dĺžku života) súčiastky, potom

Definícia 1. *Spoľahlivosť $R(t)$ definujeme ako pravdepodobnosť, že súčiastka prežije do času t. Preto $R(t) = P(X > t) = 1 - F(t)$, kde $F(t)$ je distribučná funkcia X* [1].

Prepokladáme, že v čase $t = 0$ súčiastka pracuje správne ($R(0) = 1$) a že súčiastka nemôže pracovať bezchybne donekonečna ($\lim_{t\to+\infty} R(t) = 0$). Pre záporné t nemá spoľahlivosť zmysel, ale položíme $R(t) = 1$ pre $t < 0$, nakoľko je $R(t)$ nerastúca. $F(t)$ teda určuje "nespoľahlivosť". Derivovaním $R(t)$ máme (ak je X spojitá náhodná premenná s hustotou $f(t)$)

$$R'(t) = -f(t) \tag{1}$$

Uvedomme si, že $f(t)\Delta t$ je nepodmienená pravdepodobnosť, že súčiastka zlyhá v intervale $(t, t + \Delta t]$. Má však zmysel skúmať aj podmienenú pravdepodobnosť, keď už máme dodatočnú informáciu o tom, ako dlho súčiastka funguje, ktorá bude zrejme rôzna od $f(t)\Delta t$. Chceme teda vyjadriť pravdepodobnosť, zohľadňujúc jej terajší stav. Podmienená pravdepodobnosť, za predpokladu korektného fungovania počas doby t je daná vzťahom

$$\begin{aligned} G_Y(y|t) &= P(Y \le y | X > t) \\ &= P(X \le y + t | X > t) \\ &= \frac{P(X \le y + t \quad a \quad X > t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(t < X \le y + t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{F(t + y) - F(t)}{R(t)}. \end{aligned} \tag{2}$$

[1] Distribučnú funkciu definujeme ako $F(t) = P(X \le t)$

Definícia 2. *Okamžitú mieru zlyhania*[2] $h(t)$ *definujeme ako*

$$h(t) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{F(t+x)-F(t)}{R(t)} = \lim_{x\to 0}\frac{R(t)-R(t+x)}{xR(t)}$$

teda

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}. \tag{3}$$

Teraz $h(t)\Delta t$ je podmienená pravdepodobnosť, že ak súčiastka funguje počas doby t, tak potom sa pokazí v intervale $(t, t+\Delta t]$. Táto je väčšia ako nepodmienená, lebo $R(t) < 1$.
Integrovaním 3 a využitím (1) a $R(0) = 1$ dostávame

$$\begin{aligned} \int_0^t h(s)\,ds &= \int_0^t \frac{f(s)}{R(s)}\,ds \\ &= \int_0^t \frac{-R'(s)}{R(s)}\,ds \\ &= \int_{R(0)}^{R(t)} \frac{dR}{R}, \\ &= -\ln R(t) \end{aligned} \tag{4}$$

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(s)\,ds\right] \tag{5}$$

Môže byť užitočné charakterizovať jedným číslom, aký risk podstupujeme ak používame nejakú súčiastku.

Definícia 3. *Funkciu*

$$H(t) = \int_0^t h(s)\,ds \tag{6}$$

nazývame celkové riziko.[3]

Ide o akési "sčítanie"všetkých podmienených pravdepodobností výsledkom čoho je celková miera rizika. Spoľahlivosť a celkový risk sú vo vzťahu

$$R(t) = e^{-H(t)} \tag{7}$$

Nech $V_X(x|t)$ označuje podmienenú distribučnú funkciu životnosti X, ak súčiastka prežila do času t. Potom platí

$$V_X(x|t) = \frac{\int_t^x f(y)\,dy}{P(X>t)} \tag{8}$$

Definícia 4. *Životnosť súčiastky ak prežila do času t je daná vzťahom*

$$V(x|t) = \begin{cases} \frac{F(x)-F(t)}{1-F(t)}, & ak\ x \geq t, \\ 0, & inak. \end{cases} \tag{9}$$

[2] v ang. aj ako hazard rate alebo conditional probability function
[3] v ang. cumulative hazard

Pre jej hustotu platí

$$v(x|t) = \begin{cases} \frac{f(x)}{1-F(t)}, & \text{ak } x \geq t, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \tag{10}$$

Podmienená hustota pravdepodobnosti je korektnou hustotou, narozdiel od okamžitej miery zlyhania pre ktorú platí:

$$0 = \lim_{t\to\infty} R(t) = \exp\left[-\int_0^\infty h(t)\,dt\right] \tag{11}$$

Poznamenajme ďalej, že $h(t) = v(t|t)$.

Definícia 5. *Podmienenú spoľahlivosť $R_t(y)$ definujeme ako pravdepodobnosť toho, že súčiastka bude fungovať počas časového intervalu dĺžky y, ak prežila do času t. Teda*

$$R_t(y) = \frac{R(t+y)}{R(t)} \tag{12}$$

Uvedomme si, že $R_t(y) = 1 - G(y|t)$.

2.2 Stredná doba do zlyhania

Definícia 6. *Strednú hodnotu životnosti súčiastky X nazývame očakávaná životnosť alebo stredná doba do zlyhania [4] súčiastky.*

Spoľahlivosť životnosti súčiastky X je daná vzťahom $R(t) = P(X < t)$ a $R'(t) = -f(t)$. Platí

$$E[X] = \int_0^\infty t f(t)\,dt = -\int_0^\infty tR'(t)\,dt.$$

Integráciou per partes dostávame

$$E[X] = -tR(t)|_0^\infty + \int_0^\infty R'(t)\,dt.$$

Za predpokladu existencie konečnej strednej hodnoty $E(X)$ keďže $R(t)$ sa blíži k nule rýchlejšie ako t k ∞ teda $\lim_{t\to\infty} tR(t) = 0$, máme

$$E[X] = \int_0^\infty R(t)\,dt. \tag{13}$$

3 Rozdelenia pravdepodobnosti

V tejto časti popíšeme rôzne rozdelenia pravdepodobnosti vyskytujúce sa v teórii spoľahlivosti.

[4] z ang. Mean time to failure, označuje sa aj ako stredná doba do poruchy

3.1 Exponenciálne rozdelenie

Exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti hrá veľmi dôležitú úlohu v teórii spoľahlivosti. Dôvodom je Markovova vlastnosť a jej vzťah k Poissonovmu rozdeleniu. Preto nasledujúce náhodné premenné môžeme charakterizovať exponenciálnym rozdelením

- Čas medzi dvoma prístupmi na server
- Čas do zlyhania (životnosť)
- Čas potrebný na opravu pokazenej súčiastky

Definícia 7. *Hovoríme, že náhodná premenná X má Exponenciálne rozdelenie s parametrom λ ($\lambda > 0$), ak jej hustota pravdepodobnosti je daná vzťahom:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & ak\ x > 0, \\ 0, & inak. \end{cases} \tag{14}$$

Pre náhodné premenné s takouto funkciou hustoty používame označenie $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Distribučná funkcia exponenciálneho rozdelenia je daná vzťahom:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ak } 0 \leq x < \infty, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \tag{15}$$

Pre pravdepodobnosť platí

$$\begin{aligned} P(X > t) &= \int_t^\infty f(x)\,dx \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

a ak $a < b$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a) \\ &= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \end{aligned}$$

Skúmajme teraz podmienené rozdelenie pravdepodobnosti. Zaujíma nás rozdelenie $Y = X - t$, teda zostávajúcej životnosti.
Pre exponenciálne rozdelenie podľa (2) platí

$$\begin{aligned} G_Y(y|t) &= \frac{\int_t^{y+t} f(x)\,dx}{\int_t^\infty f(x)\,dx} \\ &= \frac{\int_t^{y+t} \lambda e^{-\lambda x}\,dx}{\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx} \\ &= \frac{e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda y})}{e^{-\lambda t}} \\ &= 1 - e^{-\lambda y}. \end{aligned}$$

Exponenciálne rozdelenie ako jediné disponuje Markovovou vlastnosťou, teda rozdelenia podmienenej a nepodmienenej pravdepodobnosti sú rovnaké. $G_Y(y|t)$ je nezávislá od t. Súčiastka, ktorej pravdepodobnostné rozdelenie životnosti je exponenciálne nestarne, jej zlyhanie nie je dôsledkom nejakého postupného procesu, ale výsledkom akejsi náhlej udalosti. Súčiastka si nepamätá ako dlho žije.

Pre okamžitú mieru zlyhania exponenciálneho rozdelenia platí

$$h(t) \quad = \quad \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda, \tag{16}$$

teda ako jediné rozdelenie má konštantnú okamžitú mieru zlyhania.

Uvažujme súčiastku, ktorá nestarne, teda jej spoľahlivosť je nezávislá od toho ako dlho žije. Podmienená spoľahlivosť je rovná nepodmienenej spoľahlivosti. Ukážeme, že podmienené rozdelenie doby životnosti je exponenciálne.

$$R_t(y) = R(y) \qquad \text{pre} \;\; \forall y, \quad t \geq 0.$$

Použitím definície (5) dostávame

$$R(y+t) = R(y)R(t) \tag{17}$$

Preusporiadaním máme

$$\frac{R(y+t) - R(y)}{t} = \frac{[R(t) - 1]R(y)}{t} \tag{18}$$

Ak $t \to 0$ použijúc $R(0) = 1$ získame

$$R'(y) = R'(0)R(y). \tag{19}$$

Teda $R(y) = e^y R'(0)$. Ak položíme $R'(0) = -\lambda$ dostávame

$$R(y) = e^{-\lambda y}, \quad y > 0, \tag{20}$$

čo znamená, že náhodná premenná životnosti má exponenciálne rozdelenie s parametrom λ.

Základné charakteristiky

$$E(X) \quad = \quad \frac{1}{\lambda} \qquad\qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3.2 Gamma rozdelenie

Definícia 8. *Hovoríme, že náhodná premenná X má Gamma rozdelenie s parametrami parametrami α a λ ($\alpha > 0$, $\lambda > 0$), ak jej hustota pravdepodobnosti je daná vzťahom:*

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, & ak\ x > 0, \\ 0, & inak. \end{cases} \tag{21}$$

α nazývame parameter tvaru a λ parameter škály.
Pri voľbe parametra $\alpha = 1$ dostaneme exponenciálne rozdelenie.
Základné charakteristiky

$$E(X) \quad = \quad \frac{\alpha}{\lambda} \qquad\qquad D(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

3.3 Weibullovo rozdelenie

Definícia 9. *Hovoríme, že náhodná premenná X má Weibullovo rozdelenie s parametrami α a λ ($\alpha > 0$, $\lambda > 0$), ak jej hustota pravdepodobnosti je daná vzťahom:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}, & ak\ x > 0, \\ 0, & inak. \end{cases} \tag{22}$$

Môžeme pozorovať, že exponenciálne rozdelenie je špeciálnym prípadom Weibullovho rozdelenia v prípade voľby $\alpha = 1$.
Základné charakteristiky

$$E(X) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/\alpha}\Gamma(1+1/\alpha) \qquad D(X) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2/\alpha}[\Gamma(1+2/\alpha) - \Gamma^2(1+1/\alpha)]$$

4 Spoľahlivostné systémy a ich reprezentácia

4.1 Reprezentácia pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt

Pre teoretické zdôvodnenie správnosti algoritmu, ktorému sa budeme venovať v časti 5 si potrebujeme dané pojmy formalizovať.

Definícia 10. *Stavom*[5] *budeme rozumieť vektor $X = (X_1, ..., X_n) \in \{0,1\}^n$. Stavom v čase t budeme rozumieť náhodný vektor $X(t) = (X_1(t), ..., X_n(t))$ s hodnotami v množine $\{0,1\}^n$*

Udalosť $X_i(t) = 1$ znamená, že i-ta súčiastka zapojenia v čase t funguje. Pre každú súčiastku existuje náhodná premenná jej životnosti, pre celé zapojenie máme teda náhodný výber životností $T_1, \ldots, T_n$ (pretože ide o nezávislé, rovnako rozdelené náhodné premenné) pričom udalosť $T_i > t$ znamená, že i-ta súčiastka v čase t nezlyhala ($X_i(t) = 1$).

Definícia 11. *Systémom*[6] *budeme rozumieť funkciu $\Phi : M_n = \{0,1\}^n \longmapsto \{0,1\}$.*

Teda každému stavu (každej možnej situácii fungovania jednotlivých súčiastok) priradí 1 ak systém v danom stave funguje a 0 ak nefunguje.

V zmysle definícií 10 a 11 sa na množinu M_n (teda množinu stavov) môžeme pozerať ako na maticu núl a jednotiek rozmerov 2^n x n a systém môžeme jednoznačne charakterizovať stĺpcovým vektorom dĺžky 2^n. Potom každý riadok matice je stav a k nemu prislúchajúca komponenta vo vektore charakterizujúcom systém hovorí, či systém pre daný stav funguje.
Na obrázku je zobrazená situácia pre $n = 3$ a systém, ktorý funguje práve vtedy, keď aspoň dve z troch súčiastok fungujú (TMR ako je uvedené v sekcii 6.3).

[5] v angl. ako State vector
[6] v angl. sa stretneme s názvom Structure function

M_n			S^*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

TMR systém

Poznamenajme, že tabuľkou vieme reprezentovať akýkoľvek systém.

Definícia 12. *Zaveďme reláciu* "$\leq$"*na množine* M_n*: pre* $X, Y \in M_n$:
"$X \leq Y$" $\iff \forall i = 1, 2, \dots n : X_i \leq Y_i$

Definícia 13. *Systém nazývame pozitívny práve vtedy, keď sú splnené nasledovné podmienky:*

1. $\Phi(\vec{1}^n) = 1$

2. $\Phi(\vec{0}^n) = 0$

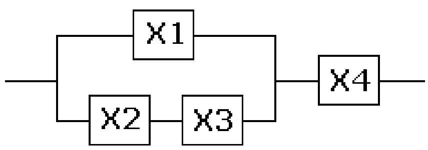
3. $\forall X, Y \in M_n : X \leq Y \Rightarrow \Phi(X) \leq \Phi(Y)$

Tieto podmienky hovoria o tom, že:

1. Systém funguje, pokiaľ všetky jeho súčiastky fungujú.
2. Systém nefunguje, pokiaľ všetky jeho súčiastky nefungujú.
3. Táto požiadavka hovorí o tom, že funkčnosť žiadnej zo súčiastok v zapojení nespôsobí zastavenie systému; inak povedané, že keď už v postupnom procese zlyhávania daných súčiastok systém prestane fungovať, zlyhanie dalšej súčiastky nespôsobí naskočenie systému, čo je zároveň aj prirodzenou podmienkou pre počítanie strednej doby do zlyhania.

4.2 Reprezentácia diagramom

Snáď najjednoduchším a najintuitívnejším zobrazením nejakého systému, je zobrazenie pomocou diagramu. Takéto zobrazenie môže vyzerať napríklad takto:



Reprezentácia diagramom

Systém je funkčný, pokiaľ existuje "priechodná"cesta zľava doprava, kde súčiastka je priechodná práve vtedy, keď funguje. Každú súčiastku nakreslíme do diagramu z pochopiteľných príčin práve raz.
Táto reprezentácia je veľmi názorná, jej veľkým nedostatkom však je, že existujú systémy (dokonca pozitívne) nezobraziteľné takýmto diagramom.
Ako príklad uvedieme systém so štyrmi súčiastkami, ktorý popíšeme tabuľkou. Tento systém je pozitívny a neredukovateľný na systém s menším počtom súčiastok.

0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Systém, ktorý nie je možné zobraziť diagramom

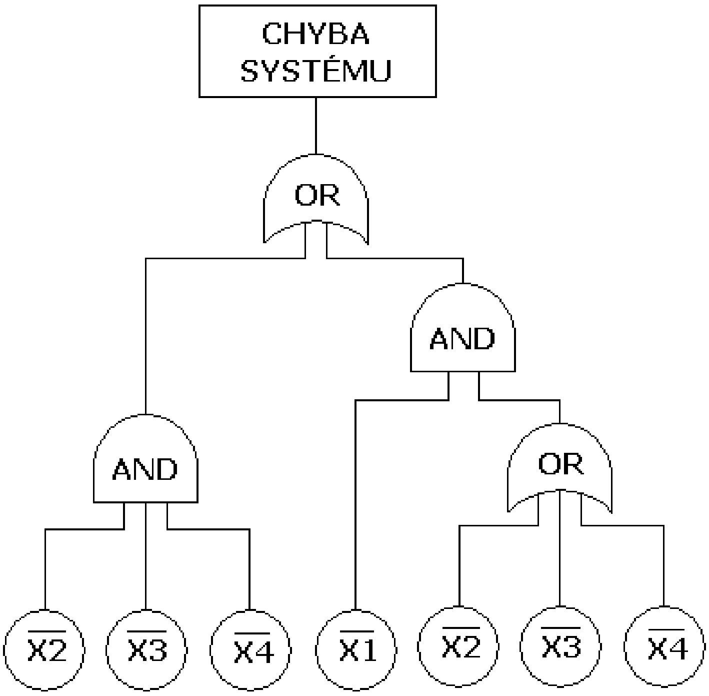
Tento systém funguje práve vtedy, keď funguje prvá súčiastka a zároveň nejaká iná súčiastka alebo keď fungujú druhá, tretia aj štvrtá súčiastka súčasne.

4.3 Reprezentácia pomocou chybového stromu

V procese výroby a zdokonaľovania prístrojov môže byť užitočné, mať prehľad o slabých a silných článkoch nejakého zapojenia, či mať presne návod, čo musí byť splnené, aby daný systém zlyhal. Systém môže byť jednoznačne určený schémou, ktorá hovorí, kedy zapojenie zlyhá, jednou z takýchto foriem je aj chybový strom[7]. Využívajúc logické operátory AND a OR vieme elegantne popísať podmienky zlyhania systému. Majme systém ktorého funkčnosť je charakterizovaná tabuľkou z časti 4.2

Potom jeho chybový strom bude vyzerať:

[7] v ang. fault tree



Chybový strom

$\overline{X_i}$ v krúžku znamená, že i-ta súčiastka zlyhala.

4.4 Identifikácia pozitívnych systémov

Vygenerujeme si všetky možné systémy a z nich budeme postupne vyhadzovať tie, ktoré nespĺňajú podmienky pozitívnosti 13.
Spomedzi celkového počtu systémov 2^n sa nám najprv stačí obmedziť na tie, ktoré majú na začiatku 0 a na konci 1.
Pravidlo monotónnosti otestujeme tak, že pre každý riadok matice M_n patriaci I^* (formálny popis je uvedený v (23)), teda pre ktorý je vo vektore systému 1, skontrolujeme či v nejakom riadku väčšom ako sledovaný riadok nie je vo vektore systému 0. Ak takáto situácia nenastane pre žiaden vektor z I^*, potom systém môžeme považovať za pozitívny.

4.5 Identifikácia systémov neredukovateľných na systém nižšej dimenzie

V množine M_n máme všetky systémy, z ktorých vieme identifikovať tie, ktoré sú pozitívne. Môžu sa však medzi nimi nachádzať také systémy, v ktorých je jedna alebo viac súčiastok zbytočných v zmysle, že nemajú vplyv na správanie sa systému. Súčiastka je nadbytočná, ak sa systém v prípade jej funkčnosti správa rovnako ako v prípade jej nefunkčnosti. Ak chceme skontrolať, či je i-ta súčiastka zbytočná, tak vektor systému rozdelíme na dve časti, na časť kedy daná súčiastka funguje a na časť kedy nefunguje. Dostaneme dva systémy o jeden rozmer nižšie. Ak ide o systémy rovnaké, súčiastku považujeme za nadbytočnú.

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Ak prvá súčiastka nefunguje

0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ak prvá súčiastka funguje

0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Systém rozmeru 3, regulovateľný na rozmer 2, prvá súčiastka je nadbytočná

4.6 Triedy ekvivalencií systémov

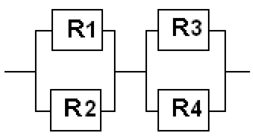
Motiváciou k skúmaniu tried ekvivalencií je skutočnosť, že častokrát majú systémy z hľadiska toho, čo nás zaujíma, úplne totožné vlastnosti. Je preto prirodzené obmedziť sa len na určité množiny systémov.

4.6.1 Trieda ekvivalencie na základe rovnakého pravdepodobnostného správania

Podľa (30) vieme, že spoľahlivosť celkového zapojenia vieme vyjadriť ako "polynóm"spoľahlivostí jednej súčiastky. Ak teda majú dva systémy takýto polynóm rovnaký, čo sa týka pravdepodobnostného správania medzi nimi niet rozdielu. Poznamenajme, že môže ísť o systémy rôzne.

Systém				1	2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Systém 1



Systém 2

?

Dva systémy o štyroch súčiastkach s rovnakým pravdepodobnostným správaním, no jeden z nich nie je zobraziteľný diagramom.

4.6.2 Izomorfné systémy

Dva systémy považujeme za izomorfné, ak jeden vznikne z druhého akousi permutáciou jeho súčiastok. Túto zmenu môžeme intuitívne chápať aj ako prečíslovanie súčiastok, kde zapojenie je to isté, len súčiastky majú iné označenia. Táto permutácia v podstate predstavuje výmenu stĺpcov v matici pravdivostných hodnôt M_n.
Je zrejmé, že ak permutujeme dve súčiastky, ktoré sú pre fungovanie systému rovnocenné, nový vektor systému sa nezmení a nezmení sa ani polynóm definovaný v (30).

Definícia 14. *Dva systémy Φ_1, Φ_2 nazývame izomorfné a označujeme $\Phi_1 \cong \Phi_2$ práve vtedy, keď existuje bijektívne zobrazenie $\delta : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ také, že $\Phi_1(X) = \Phi_2(\delta(X))$ pre všetky stavy $X \in M_n$.*

5 Výpočet strednej doby do zlyhania

5.1 Výpočet spoľahlivosti

V prípade skúmania životnosti zapojení z pravdepodobnostného hľadiska je náhodným elementom to, ako dlho bude každá zo súčiastok fungovať. Z toho prirodzene plynie, že množinu elementárnych výsledkov budeme chápať ako

$$\Omega = [0, \infty)^n$$

a σ-algebru ako množinu dostatočne bohatú teda

$$\mathcal{S} = B_n(\Omega).$$

Pre n súčiastok máme teda n-rozmerný náhodný výber časov (predpokladáme, že životy súčiastok sú nezávislé a rovnako rozdelené) $(T_1, T_2, \dots T_n)$.
Pre $(t_1, t_2, \dots t_n) \in \Omega$ je životnosť i-teho článku je daná ako $T_i(t_1, t_2, \dots t_n) = t_i$.
Pre fixovaný čas t sa pozrieme na každú súčiastku osobitne, ak $t_i > t$ tak funguje, teda $X_i(t)(t_1, t_2, \dots t_n) = 1$.
Skúmajme distribučnú funkciu rozdelenia funkčnosti systému. Teraz skúsime nájsť spôsob, ako vyjadriť distribučnú funkciu životnosti celého zapojenia daného systému Φ^*.
Označme si množinu

$$I^* = \{X \in M_n : \Phi^*(X) = 1\} \tag{23}$$

ktorá je množinou všetkých stavov, v ktorých zapojenie funguje.
Množinu $\{(t_1, t_2, \dots t_n) \in \Omega : \Phi^*(X(t)(t_1, t_2, \dots t_n)) = 1\}$ preto vieme zapísať ako $\{(t_1, t_2, \dots t_n) \in \Omega : X(t)(t_1, t_2, \dots t_n) \in I^*\}$
Pravdepodobnosť, že systém funguje do času t, môžeme vyjadriť ako

$$R^*(t) = P(\Phi^*(X(t)) = 1) = P(X(t) \in I^*) \tag{24}$$

$$R^*(t) = P\left(\bigcup_{Y \in I^*} \bigcap_{i=1}^{n} (X_i(t) = Y_i)\right) \tag{25}$$

Kvôli názornosti skúmajme teraz spoľahlivosť systému pre určitý fixný čas t. Každá súčiastka má pre tento fixný čas určitú spoľahlivosť, teda sa na ňu pozeráme, že s pravdepodobnosťou R(t) funguje.
Podľa (25) sa stačí pozerať len na tie riadky matice M_n, pre ktoré je vo vektore systému 1.

Je dôležité uvedomiť si, že počítame pravdepodobnosť zo zjednotenia množín, ktoré sú disjunktné. Preto namiesto zjednotenia počítame súčet pravdepodobností.

$$R^*(t) = P\left(\bigcup_{Y\in I^*}\bigcap_{i=1}^{n}(X_i(t)=Y_i)\right) = \sum_{Y\in I^*} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i(t)=Y_i)\right) \tag{26}$$

Pozrime sa na nejaké $Y \in I^*$, teda riadok zodpovedajúci jednotke vo vektore systému.

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i(t)=Y_i)\right) &= P\Big((X_1(t)=Y_1)\bigcap(X_2(t)=Y_2)\bigcap\cdots\bigcap(X_n(t)=Y_n)\Big) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i(t)=Y_i) \end{aligned} \tag{27}$$

kde posledná rovnosť plynie z nezávislosti súčiastok, t.j. náhodných premenných $X_1(t),\dots,X_n(t)$. Pričom vieme, že

$$P(X_i(t)=Y_i) = \begin{cases} R(t), & \text{ak } Y_i = 1, \\ 1-R(t), & \text{ak } Y_i = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Môžeme pozorovať, že táto pravdepodobnosť závisí len od počtu jednotiek či núl daného vektora stavu Y, teda od $j=\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Potom podľa (27)

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i(t)=Y_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i(t)=Y_i) = (R(t))^j(1-R(t))^{n-j}$$

Ak označíme $R(t)=r$ dostávame

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i(t)=Y_i)\right) &= r^j(1-r)^{n-j} \\ &= r^j \sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i}(1)^{n-j-i}(-r)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i} r^{j+i}(-1)^i \end{aligned} \tag{29}$$

Keď potom podľa (26) sčítame (29) zisťujeme, že pre systém o n súčiastok máme spoľahlivosť celého systému $R^*(t)$ vyjadrenú pomocou spoľahlivostí súčiastok $R(t)$

$$R^*(t) = c_1R(t) + c_2(R(t))^2 + c_3(R(t))^3 + \cdots + c_n(R(t))^n \tag{30}$$

kde koeficienty $c_1, c_2 \dots c_n$ sú celé čisla.

5.2 Výpočet strednej doby do zlyhania pre exponenciálne rozdelenie

V prípade exponenciálneho rozdlenia je spoľahlivosť (podľa (15) z časti 3.1)

$$R(t) = e^{-\lambda t} \tag{31}$$

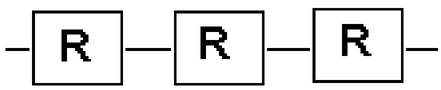
Strednú dobu do zlyhania celého systému spočítame podľa (13), (30) a (31) ako

$$
\begin{aligned}
E^*(X) &= \int_0^\infty R^*(t)dt \\
&= \int_0^\infty c_1 R(t) + c_2(R(t))^2 + c_3(R(t))^3 + \cdots + c_n(R(t))^n dt \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n c_i e^{-i\lambda t} \right) dt \\
&= \sum_{i=1}^n \left(c_i \int_0^\infty e^{-i\lambda t} dt \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \left(\frac{c_i}{i} \right)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

6 Príklady spoľahlivostných systémov

6.1 Sériové zapojenie

Majme systém, ktorý funguje práve vtedy, keď každá z jeho súčiastok funguje.



Sériové zapojenie pre $n = 3$

Systém pre sériové zapojenie má tvar

$$\Phi(X) = \prod_{i=1}^n X_i \tag{33}$$

Spoľahlivosť tohto systému môžeme vyjadriť ako

$$R^*(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) \tag{34}$$

V prípade exponenciálneho rozdelenia (15) máme spoľahlivosť

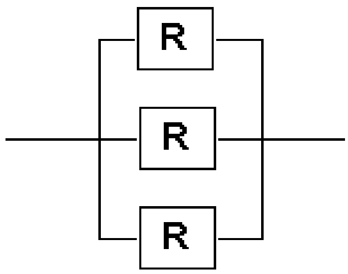
$$R^*(t) = e^{-\lambda n t} \tag{35}$$

Stredná doba do zlyhania bude podľa (13) potom

$$E^*[X] = \int_0^\infty R^*(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-n\lambda t}\, dt = \frac{1}{n\lambda} \tag{36}$$

6.2 Paralelné zapojenie

Majme systém, ktorý funguje práve vtedy, keď aspoň jedna z jeho súčiastok funguje.



Paralelné zapojenie pre $n = 3$

Systém pre paralelné zapojenie má tvar

$$\Phi(X) = \max_i (X_i) \tag{37}$$

Spoľahlivosť paralelného zapojenia je daná vzťahom

$$R^*(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t)) \tag{38}$$

Pre exponenciálne rozdelelnie (15) je spoľahlivosť

$$R^*(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \tag{39}$$

Spoľahlivosť vyjadrená ako "polynóm"(podľa 30)

$$R^*(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} R(t)^i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} e^{-i\lambda t} \tag{40}$$

Lema 15. *Pre prirodzené čísla n platí*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}\binom{n}{i}}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Dôkaz urobíme indukciou.

- Pre $n = 1$ je rovnosť triviálna.
- Ak platí rovnosť pre n, potom aj pre $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(-1)^{i-1}\binom{n+1}{i}}{i} &= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}\binom{n}{i}}{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}\binom{n}{i-1}}{i} = \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n+1}{i} = \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1 - (-1)^n}{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}
\end{aligned}$$

Strednú dobu do zlyhania dostaneme ako (30)

$$
\begin{aligned}
E^*[X] &= \int_0^\infty R^*(t)\,dt = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\binom{n}{i} e^{-i\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}\binom{n}{i}}{i} \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Poznamenajme, že harmonický rad môžeme aproximovať pomocou Eulerovej-Mascheroniho konštanty γ (43) a to podľa [4] vzťahom

$$
\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + O(n^{-4}) \tag{42}
$$

$$
\gamma \equiv \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right) \doteq 0.5772156649015 \tag{43}
$$

6.3 TMR

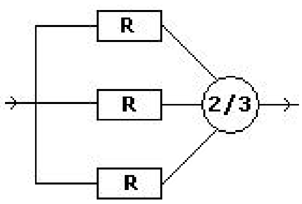
Majme paralelný systém zapojenia troch nezávislých článkov s rovnakou spoľahlivosťou. Pre korektné fungovanie systému musia fungovať aspoň dva z troch článkov, takýto systém nazývame TMR[8]. Použitím Bernoulliho schémy dostávame

$$
\begin{aligned}
R_{TMR}(t) &= \sum_{i=2}^3 \binom{3}{i} R^i(t)(1-R(t))^{3-i} = \binom{3}{2} R^2(t)(1-R(t)) + \binom{3}{3} R^3(t)(1-R(t))^0 \\
&= 3R^2(t)(1-R(t)) + R^3(t)
\end{aligned}
$$

teda

$$
R_{TMR}(t) = 3R^2(t) - 2R^3(t)
$$

Grafické znázornenie zapojenia



TMR systém

Systém pre takéto rozdelenie je

$$
\Phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \sum_{i=1}^3 X_i \geq 2 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}
$$

[8] z ang. triple modular redundancy

Uvedomme si, že

$$R_{TMR} = \begin{cases} > R & \text{ak } R > \frac{1}{2}, \\ = R & \text{ak } R = \frac{1}{2}, \\ < R & \text{ak } R < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Teda TMR systém zvyšuje spoľahlivosť len ak je spoľahlivosť jednotlivých článkov väčšia než 0.5.
Ak sa jedná o exponenciálne rozdelenie (15), tak strednú dobu do zlyhania vypočítame ako

$$E[X] = \int_0^\infty R_{TMR}(t)\,dt = \int_0^\infty 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}\,dt = \frac{5}{6\lambda} \tag{44}$$

6.4 K z N systém

Uvažujme zapojenie s N súčiastkami, ktoré funguje práve vtedy, keď funguje aspoň K súčiastok. Napríklad pre $K = 2$ a $N = 3$ dostávame TMR systém, pre $K = N$ sériové zapojenie a ak $K = 1$, tak dostávame paralelné zapojenie.
Spoľahlivosť bude nadobúdať tvar

$$R_{KzN}(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} R^i(t)(1 - R(t))^{n-i}$$

Systém pre takéto rozdelenie je

$$\Phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \sum_{i=1}^n X_i \geq K \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Veta 16. *[3] Nech V_n^j je j-ta poradová štatistika náhodného výberu $V_1, V_2, ..., V_n$ z rozdelenia $Exp(\lambda)$. Potom existuje postupnosť $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ nezávislých náhodných premenných s rozdelením $Exp(\lambda)$ tak, že platí*

$$V_n^j = \frac{Z_1}{n} + \frac{Z_2}{n-1} + \frac{Z_3}{n-2} + ... + \frac{Z_j}{n-j+1}$$

K z N súčiastok funguje pokiaľ sa nepokazí $N - K + 1$ súčiastok. Teda nás zaujíma životnosť súčiastky, ktorá zlyhá ako $N - K + 1$ v poradí a jej životnosť stotožníme s funkčnosťou celého systému. Preto ľahko nahliadneme, že podľa 16 životnosť K z N systému vyjadríme ako

$$V_n^{n-k+1} = \frac{Z_1}{n} + \frac{Z_2}{n-1} + \frac{Z_3}{n-2} + ... + \frac{Z_{n-k+1}}{k}$$

Pre strednú dobu do zlyhania K z N systému, pokiaľ ide o exponenciálne rozdelenie, preto dostávame

$$E(X) = E(V_n^{n-k+1}) = E\left(\sum_{i=k}^{n} \frac{Z_{n-i+1}}{i}\right) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$$

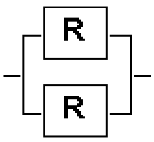
7 Prehľad zapojení s dvomi, tromi a štyrmi súčiastkami

V tejto časti urobíme prehľad reprezentantov všetkých pozitívnych neizomorfných systémov neredukovateľných na systém nižšej dimenzie. Opisovať budeme systémy, ktorých súčiastky majú životnosť rozdelenú exponenciálne s parametrom $\lambda = 1$. Označenie $MTTF$ budeme používať pre strednú dobu do zlyhania.
Systematicky sme pre každý vektor systému určili, či je pozitívny a neredukovateľný na systém nižšej dimenzie. Neizomorfizmus sme overovali permutovaním tabuľky M_n. Na identifikáciu systémov a výpočet sme použili software Matlab.

7.1 Zapojenia s dvomi súčiastkami

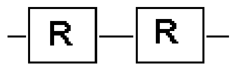
Tu sa jedná o triviálny prípad kedy existujú len dva pozitívne neredukovateľné systémy.

1



$R^* = 2R - R^2$
$R^*(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$
$MTTF = \frac{3}{2}$

2

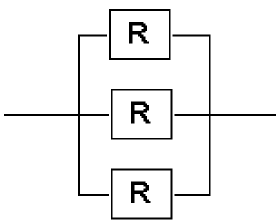


$R^* = R^3$
$R^*(t) = e^{-3t}$
$MTTF = \frac{1}{2}$

7.2 Zapojenia s tromi súčiastkami

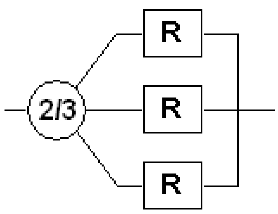
Čo sa týka tried ekvivalencie, tak v prípade troch súčiastok sme našli len 5 systémov, všetky majú rozličné pravdepodobnostné správanie, rôznu dobu do zlyhania a všetky sú zobraziteľné diagramom.

1



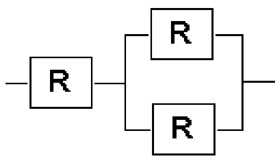
$R^* = 3R - 3R^2 + R^3$
$R^*(t) = 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t}$
$MTTF = \frac{11}{6}$

2



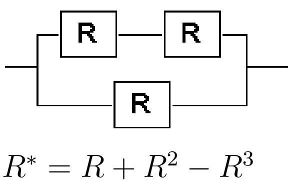
$R^* = 3R^2 - 2R^3$
$R^*(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$
$MTTF = \frac{5}{6}$

3



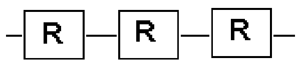
$R^* = 2R^2 - R^3$
$R^*(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t}$
$MTTF = \frac{2}{3}$

4



$R^* = R + R^2 - R^3$
$R^*(t) = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}$
$MTTF = \frac{7}{6}$

5



$R^* = R^3$
$R^*(t) = e^{-3t}$
$MTTF = \frac{1}{3}$

Reprezentácia pomocou pravdivostnej tabuľky vyzerá nasledovne

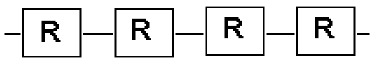
Systém			1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

TMR systém

7.3 Zapojenia so štyrmi súčiastkami

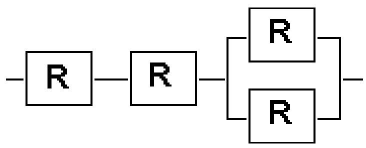
Pri štyroch súčiastkach sme algoritmicky identifikovali 20 rôznych neizomorfných systémov neredukovateľných na systém nižšej dimenzie. Dostali sme 17 rozličných pravdepodobnostných správaní a 15 rôznych dôb do zlyhania. Len 14 systémov je zobraziteľných diagramom.

1



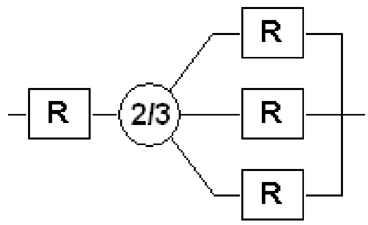
$R^* = R^4$
$R^*(t) = e^{-4t}$
$MTTF = \frac{1}{4}$

2



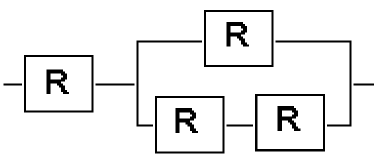
$R^* = 2R^3 - R^4$
$R^*(t) = 2e^{-3t} - e^{-4t}$
$MTTF = \frac{5}{12}$

3



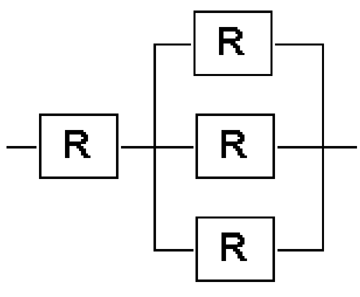
$R^* = 3R^3 - 2R^4$
$R^*(t) = 3e^{-3t} - 2e^{-4t}$
$MTTF = \frac{1}{2}$

4



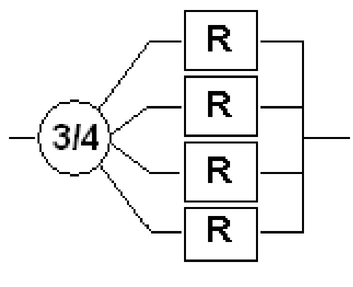
$R^* = R^2 + R^3 - R^4$
$R^*(t) = e^{-2t} + e^{-3t} - e^{-4t}$
$MTTF = \frac{7}{12}$

5



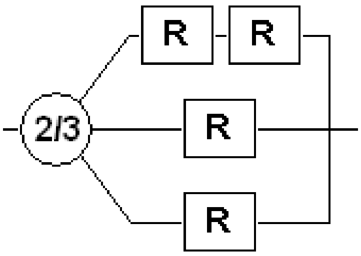
$R^* = 3R^2 - 3R^3 + R^4$
$R^*(t) = 3e^{-2t} - 3e^{-3t} + e^{-4t}$
$MTTF = \frac{3}{4}$

6



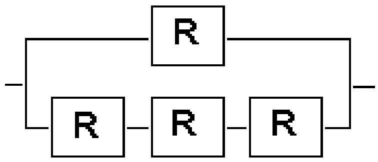
$R^* = 4R^3 - 3R^4$
$R^*(t) = 4e^{-3t} - 3e^{-4t}$
$MTTF = \frac{7}{12}$

7



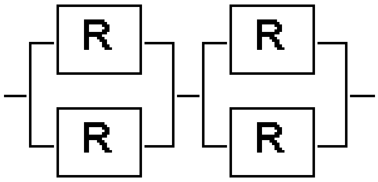
$R^* = R^2 + 2R^3 - 2R^4$
$R^*(t) = e^{-2t} + 2e^{-3t} - 2e^{-4t}$
$MTTF = \frac{2}{3}$

8



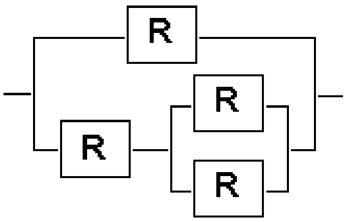
$R^* = R + R^3 - R^4$
$R^*(t) = e^{-t} + e^{-3t} - e^{-4t}$
$MTTF = \frac{13}{12}$

9



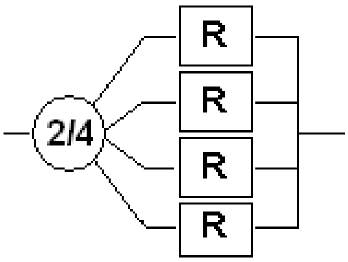
$R^* = 5R^2 - 6R^3 + 2R^4$
$R^*(t) = 5e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2e^{-4t}$
$MTTF = 1$

10



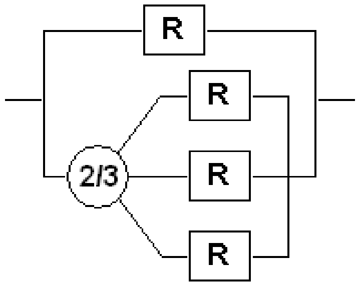
$R^* = R + 2R^2 - 3R^3 + R^4$
$R^*(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t} + e^{-4t}$
$MTTF = \frac{5}{4}$

11



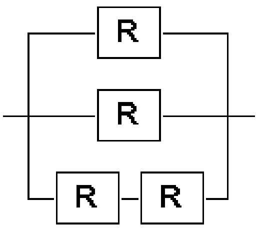
$R^* = 6R^2 - 8R^3 + 3R^4$
$R^*(t) = 6e^{-2t} - 8e^{-3t} + 3e^{-4t}$
$MTTF = \frac{13}{12}$

12



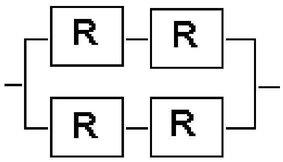
$R^* = R + 3R^2 - 5R^3 + 2R^4$
$R^*(t) = e^{-t} + 3e^{-2t} - 5e^{-3t} + 2e^{-4t}$
$MTTF = \frac{4}{3}$

13



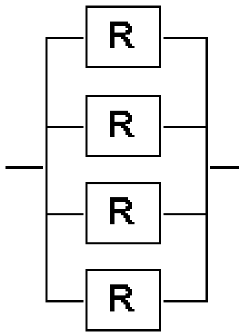
$R^* = 2R - 2R^3 + R^4$
$R^*(t) = 2e^{-t} + 2e^{-3t} + e^{-4t}$
$MTTF = \frac{19}{12}$

14



$R^* = 2R^2 - R^4$
$R^*(t) = 2e^{-2t} - e^{-4t}$
$MTTF = \frac{3}{4}$

15



$R^* = 4R - 6R^2 + 4R^3 - R^4$
$R^*(t) = 4e^{-t} - 6e^{-2t} + 4e^{-3t} - e^{-4t}$
$MTTF = \frac{25}{12}$

16
$R^* = 3R^2 - 2R^3$
$R^*(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$
$MTTF = \frac{5}{6}$

17
$R^* = 2R^2 - R^4$
$R^*(t) = 2e^{-2t} - e^{-4t}$
$MTTF = \frac{3}{4}$

18
$R^* = 3R^2 - 2R^3$
$R^*(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$
$MTTF = \frac{5}{6}$

19
$R^* = 4R^2 - 4R^3 + R^4$
$R^*(t) = 4e^{-2t} - 4e^{-3t} + e^{-4t}$
$MTTF = \frac{11}{12}$

20
$R^* = 4R^2 - 4R^3 + R^4$
$R^*(t) = 4e^{-2t} - 4e^{-3t} + e^{-4t}$
$MTTF = \frac{11}{12}$

Dané systémy môžeme reprezentovať aj pomocou tabuľky

Systém číslo				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Systémy so štyrmi súčiastkami

8 Záver

V tejto práci sme popísali základné pojmy v teórii spoľahlivosti, charakterizovali vlastnosti systémov zapojení a našli všeobecný spôsob výpočtu strednej doby do zlyhania. Tento spôsob sme aplikovali na systémy s nízkym počtom súčiastok. Na záver sa nám naskytá otázka ako pokračovať alebo rozvinúť danú problematiku. Toto môžeme v prvom rade všade tam, kde sme použili špeciálne predpoklady, ktoré nie sú splnené v mnohých situáciách, súčiasky nemusia byť rovnako rozdelené alebo nezávislé. Ďalej môžeme uvažovať viacstavové články, ktoré nebudú môcť byť charakterizované len vektorom núl a jednotiek. Zaujímavá je aj otázka pozitívnych a neizomorfných systémov alebo redukovateľnosti na nižší rozmer, ako efektívne systematicky generovať takéto systémy, ako vyjadriť počet takýchto systémov pre daný počet súčiastok alebo ako zvoliť optimálny systém za určitých obmedzení. V práci sme ukázali ako teoreticky spočítať strednú dobu do zlyhania, v praxi je však pri väčších rozmeroch tento algoritmus nepoužiteľný, jeho náročnosť je priveľká.

Referencie

[1] Trivedi K. S. (2002): Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications, John Wiley and Sons, New York

[2] Wolstenholme L. C. (1999): Reliability Modelling - A Statistical Approach, Chapman and Hall/CRC

[3] Chernoff H.; Gastwirth J. L.; Johns M. V., Jr. (1967): The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 38, No. 1., pp. 52-72.

[4] Anděl J. (2000): Matematika náhody, Matfyzpress, Praha